5 章演習問題解答例

演習 5.2 次 (命題 5.1) を示せ.

(1) α または β が 0 あるいは負の整数のとき, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は z の多項式となる.

(2) α,β が 0 でも負の整数でもないときは, べき級数 (5.1) の収束半径は 1 となり, 従って $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ における正則関数を表す.

[解答例] (1) α が 0 または負の整数のとき, k が $-\alpha+1$ 以上の自然数であれば,

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots\underbrace{(\alpha+(-\alpha))}_{0}\cdots(\alpha+k-1)=0$$

となるため, べき級数 (5.1) の $k\geq -\alpha+1$ なる項はすべて 0 となる. 従って, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $-\alpha$ 次以下の多項式となる.

β が 0 または負の整数のときも同様に, k が $-\beta+1$ 以上の自然数ならば $(\beta)_k=0$ となるため, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $-\beta$ 次以下の多項式となる.

(2) α,β が 0 でも負の整数でもないとするとき, べき級数 (5.1) の係数を

$$c_k=\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}$$

とおく.

$$\frac{(\alpha)_{k+1}}{(\alpha)_k}=\alpha+k,\quad \frac{(\beta)_{k+1}}{(\beta)_k}=\beta+k,\quad \frac{(\gamma)_k}{(\gamma)_{k+1}}=\frac{1}{\gamma+k},\quad \frac{(1)_k}{(1)_{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

より,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(\gamma+k)(k+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\frac{\alpha}{k}+1)(\frac{\beta}{k}+1)}{(\frac{\gamma}{k}+1)(1+\frac{1}{k})}\right|=1.$$

よって, ダランベールの公式 (定理 3.11) により, べき級数 (5.1) の収束半径は 1 である. 後半の主張は定理 3.10 による. □

演習 5.4 $|z|<1$ において次が成り立つことを確かめよ.

(1) $(1-z)^{-\alpha}=F(\alpha,\beta,\beta;z)$,

(2) $(1+z)^{-\alpha}+(1-z)^{-\alpha}=2F\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\alpha+1}{2},\dfrac{1}{2};z^2\right)$,

(3) $-\log(1-z)=zF(1,1,2;z)$,

(4) $\log \dfrac{1+z}{1-z} = 2zF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}; z^2\right)$.

[解答例] (1) $(1-z)^{-\alpha}$ の $z=0$ におけるテイラー級数展開を考えると,

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=0} (1-z)^{-\alpha} = (\alpha)_k \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

より,

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\beta)_k (1)_k} z^k = F(\alpha, \beta, \beta; z)$$

を得る (ただし, β は 0 でも負の整数でもない任意の複素数).

(2) $(1+z)^{-\alpha}$ の $z=0$ におけるテイラー級数展開を考えると,

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=0} (1+z)^{-\alpha} = (-1)^k (\alpha)_k \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

より,

$$(1+z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k$$

となる. よって, (1) の式と上の式との和をとると, k が奇数の項は 0 となり, k が偶数の項 ($k=2n$ とおく) は 2 倍となるので,

$$(1+z)^{-\alpha} + (1-z)^{-\alpha} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{2n}}{(1)_{2n}} z^{2n}$$

を得る. 他方, 一般に,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{s}{2}\right)_k \left(\frac{s+1}{2}\right)_k &= \left\{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\dots\left(\frac{s}{2}+k-1\right)\right\}\left\{\frac{s+1}{2}\left(\frac{s+1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{s+1}{2}+k-1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2^k} s(s+2)\cdots(s+2k-2)\frac{1}{2^k}(s+1)(s+3)\cdots(s+2k-1) \\
&= \frac{1}{2^{2k}}(s)_{2k}
\end{aligned}$$

だから,

$$2F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_k \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} z^{2k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{2k}}{(1)_{2k}} z^{2k}.$$

以上より, 与式を得る.

(3) $-\log(1-z)$ の $z=0$ におけるテイラー級数展開 (4.5) と, $(1)_k = k!$, $(2)_k = (k+1)!$ より,

$$-\log(1-z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} z^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} z^{k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k (1)_k} z^k = zF(1,1,2;z).$$

(4) $\log(1+z)$ の $z=0$ におけるテイラー級数展開は

$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^k$$

となる. これと (3) の式との和をとると, k が奇数の項は 0 となり, k が偶数の項 ($k=2n$ とおく) は 2 倍となる. そのことと, (2) で示した $\left(\frac{s}{2}\right)_n \left(\frac{s+1}{2}\right)_n = \frac{(s)_{2n}}{2^{2n}}$ をあわせて,

$$\begin{aligned}
\log \frac{1+z}{1-z} &= \log(1+z) - \log(1-z) = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n} \\
&= 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_{2n}}{(2)_{2n}} z^{2n} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (1)_n}{(1)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n} z^{2n} \\
&= 2zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; z^2\right)
\end{aligned}$$

を得る. □

演習 5.5 $|z| < 1$ において次が成り立つことを確かめよ.

(1) $e^z = \lim_{\beta \to \infty} F\left(1, \beta, 1; \frac{z}{\beta}\right)$,

(2) $\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)$,

(3) $\arctan z = zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right)$,

(4) $\cosh z = \lim_{\alpha, \beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4\alpha\beta}\right)$.

[解答例] (1) まず,

$$\begin{aligned}
F\left(1, \beta, 1; \frac{z}{\beta}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (\beta)_k}{(1)_k (1)_k} \left(\frac{z}{\beta}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{\beta^k} \frac{z^k}{k!} \\
&= 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdots \left(1 + \frac{k-1}{\beta}\right) \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

より, 上式の級数で項別に $\beta \to \infty$ とすれば $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ となる. よって, 後は上式の級数の β に関する一様収束性を示せばよい. $|\beta| \geq 1$ ならば, 任意の自然数 m に対し

$$\left|1 + \frac{m}{\beta}\right| \leq 1 + \left|\frac{m}{\beta}\right| \leq 1 + m$$

だから,

$$1 + |z| + \sum_{k=2}^{\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdots \left(1 + \frac{k-1}{\beta}\right) \frac{z^k}{k!}\right| \leq 1 + |z| + \sum_{k=2}^{\infty} (2 \cdots k) \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k.$$

右辺の級数は $|z| < 1$ で収束するので, 件の級数は $|\beta| \geq 1$ において一様収束する.

(2) $\arcsin z$ の導関数が $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ になることと, 演習 5.4 (1) の計算を思い出せば,

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} z^{2k}.$$

よって, $\arcsin z$ の $z = 0$ におけるテイラー級数展開を考えると,

$$\begin{aligned} \arcsin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{(2k+1)k!} z^{2k+1} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k (1)_k} z^{2k} \qquad \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + k - 1} = \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right). \end{aligned}$$

(3) $\arctan z$ の導関数が $(1 + z^2)^{-1}$ になることから,

$$\frac{d}{dz} \arctan z = (1 + z^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}.$$

よって, $\arctan z$ の $z = 0$ におけるテイラー級数展開を考えると,

$$\begin{aligned} \arctan z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k (1)_k} (-z^2)^k \\ &= zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right). \end{aligned}$$

(4) 演習 5.4 (2) で用いた $\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k = \frac{1}{2^{2k}} (1)_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} (2k)!$ に注意すると,

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4\alpha\beta}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} \left(\frac{z^2}{4\alpha\beta}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{\frac{1}{2^{2k}} (2k)!} \frac{z^{2k}}{2^{2k} \alpha^k \beta^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{(\alpha)_k}{\alpha^k} \frac{(\beta)_k}{\beta^k} z^{2k}. \end{aligned}$$

(1) と同様に考えると $\alpha,\beta\to\infty$ のとき $\dfrac{(\alpha)_k}{\alpha^k}\to 1$, $\dfrac{(\beta)_k}{\beta^k}\to 1$ だから, 項別に極限をとれば上式の級数は $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh z$ となる. そこで, 後は上式の級数の α,β に関する一様収束性を示せばよい. 再び (1) と同様に考えれば, $|\alpha|\geq 1$ かつ $|\beta|\geq 1$ のとき, $\left|\dfrac{(\alpha)_k}{\alpha^k}\right|\leq k!$, $\left|\dfrac{(\beta)_k}{\beta^k}\right|\leq k!$ なので,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{(2k)!}\frac{(\alpha)_k}{\alpha^k}\frac{(\beta)_k}{\beta^k}z^{2k}\right|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}|z|^{2k}.$$

右辺の級数は $|z|<2$ で収束する (「数学特論 I」の期末試験, 問題 3 を参照) ので, 件の級数は $|\alpha|\geq 1$ かつ $|\beta|\geq 1$ なる範囲で一様収束する. □

演習 5.6 オイラー作用素 $D=z\dfrac{d}{dz}$ について, 任意の自然数 k および k 回微分可能な関数 f に対し

$$D(D-1)\cdots(D-k+1)f=z^kf^{(k)}$$

が成り立つことを示せ.

[解答例] まず, 任意の定数 a,b に対し $(D+a)(D+b)f=(D+b)(D+a)f$ となることに注意しよう[1]. k に関する帰納法で示す. $k=1$ のときは, $Df=zf'$ より明らかである. 以下 $k>1$ とし, $k-1$ までは成立したと仮定する. すると,

$$\begin{aligned}
D(D-1)\cdots(D-k+1)f &= (D-k+1)\underbrace{D(D-1)\cdots(D-k+2)f}_{\text{帰納法の仮定を適用}}\\
&= (D-k+1)(z^{k-1}f^{(k-1)}) = D(z^{k-1}f^{(k-1)})-(k-1)z^{k-1}f^{(k-1)}\\
&= z\frac{d}{dz}(z^{k-1}f^{(k-1)})-(k-1)z^{k-1}f^{(k-1)}\\
&= z((k-1)z^{k-2}f^{(k-1)}+z^{k-1}f^{(k)})-(k-1)z^{k-1}f^{(k-1)} = z^kf^{(k)}
\end{aligned}$$

となり, k についても成立することがいえる. □

演習 5.13 微分方程式 (5.4) について, 次の条件 (1), (2) が同値であることを示せ.

(1) $z=a$ で正則な関数を左からかけたり割ったりすることにより, (5.4) を

$$(D_a^n+q_1(z)D_a^{n-1}+\cdots+q_n(z))f=0$$

($q_1(z),\ldots,q_n(z)$ は $z=a$ で正則な関数) という形に書き換えることができる.

[1] さらにいえば, D の「多項式」として書ける任意の微分作用素同士は交換可能である.

(2) n 個の関数

$$(z-a)\frac{p_1(z)}{p_0(z)},\quad \dots,\quad (z-a)^{n-1}\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)},\quad (z-a)^n\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

がすべて $z=a$ で正則である.

[解答例] ((1) $\Leftarrow$ (2)) まず, 演習 5.6 の証明と同様に, 微分作用素として

$$(z-a)^k\frac{d^k}{dz^k} = D_a(D_a-1)\cdots(D_a-k+1) \qquad (k=1,2,3,\dots)$$

となることがいえる. (5.4) に左から $1/p_0(z)$ および $(z-a)^n$ をかけると[2],

$$\begin{aligned}&\left\{(z-a)^n\frac{d^n}{dz^n}+\left((z-a)\frac{p_1(z)}{p_0(z)}\right)(z-a)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\right.\\&\left.\quad+\cdots+\left((z-a)^{n-1}\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}\right)(z-a)\frac{d}{dz}+(z-a)^n\frac{p_n(z)}{p_0(z)}\right\}f=0\end{aligned}$$

となる. (2) が成り立っているとき, この式の $(z-a)^k\dfrac{d^k}{dz^k}$ $(k=1,\dots,n)$ の部分を先程の式を使って D_a の式に書き換えて整理すれば, (1) の形にすることができる.

((1) $\Rightarrow$ (2)) まず, 任意の自然数 k に対し, ある自然数 $a_{k,k}, a_{k,k-1},\dots,a_{k,1}$ が存在して

$$D_a^k = \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}$$

と書ける, ということを示そう. k に関する帰納法で示す. $k=1$ のときは明らかで, $a_{1,1}=1$ とすればよい. 以下 $k>1$ とし, $k-1$ まで成立していると仮定しよう. 一般に, 関数 f に対し $D_a((z-a)^s f) = (z-a)^s(D_a+s)f$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned}D_a^k &= D_aD^{k-1} \qquad (\leftarrow\text{帰納法の仮定を適用})\\&= D_a\left(\sum_{j=1}^{k-1}a_{k-1,j}(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}\right) = \sum_{j=1}^{k-1}a_{k-1,j}(z-a)^j(D_a+j)\frac{d^j}{dz^j}\\&= \sum_{j=1}^{k-1}a_{k-1,j}(z-a)^{j+1}\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}+\sum_{j=1}^{k-1}ja_{k-1,j}(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}\\&= \sum_{j=2}^{k}a_{k-1,j-1}(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}+\sum_{j=1}^{k-1}ja_{k-1,j}(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}\\&= a_{k-1,1}(z-a)\frac{d}{dz}+\sum_{j=2}^{k-1}(a_{k-1,j-1}+ja_{k-1,j})(z-a)^j\frac{d^j}{dz^j}+a_{k-1,k-1}(z-a)^k\frac{d^k}{dz^k}\end{aligned}$$

[2] $1/p_0(z)$ を左からかけることは, $z=a$ で正則な関数をかけているか割っているかどちらかになる. 実際, 有理型関数という仮定により, $p_0(z)$ が $z=a$ で極をとらないときは $z=a$ で正則なので「割っている」, $z=a$ で極をとるときは $1/p_0(z)$ が $z=a$ で正則となるので「かけている」ことになる.

となり, k についても成立する．また, 証明から, すべての k について $a_{k,1} = a_{k,k} = 1$ となることもわかる.

今示したことを使って (1) の式の D_a^k $(k = 1, \ldots, n)$ の部分を書き換えて整理すれば, ある $z = a$ で正則な関数 $\widetilde{q}_1(z), \ldots, \widetilde{q}_{n-1}(z)$ を用いて

$$\left\{(z-a)^n \frac{d^n}{dz^n} + \widetilde{q}_1(z)(z-a)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + \widetilde{q}_{n-1}(z)(z-a)\frac{d}{dz} + q_n(z)\right\} f = 0$$

と書ける．これは (5.4) の左から $z = a$ で正則な関数を左からかけたり割ったりすることで得られた式なので, 最高次の係数を合わせれば (5.4) と一致するはずである．すなわち, この式の左から $p_0(z)/(z-a)^n$ をかけたものと (5.4) との係数を比較すれば,

$$p_1(z) = p_0(z)\frac{\widetilde{q}_1(z)}{(z-a)}, \ \ldots, \ p_{n-1}(z) = p_0(z)\frac{\widetilde{q}_{n-1}(z)}{(z-a)^{n-1}}, \ p_n(z) = p_0(z)\frac{q_n(z)}{(z-a)^n}$$

を得る．すると, $\widetilde{q}_1(z), \ldots, \widetilde{q}_{n-1}(z), q_n(z)$ は $z = a$ で正則なので, (2) が成立する． $\square$

演習 5.22 (1) $w_1 = \dfrac{1}{1-z}$ とおくとき, z, $\dfrac{d}{dz}$, $\dfrac{d^2}{dz^2}$ を w_1 と $\dfrac{d}{dw_1}$ を使って表せ.

(2) ガウスの超幾何微分方程式 (5.3) を w_1 と $\dfrac{d}{dw_1}$ を使って書き換えた微分方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた微分方程式が $w_1 = 0$ を確定特異点にもつことを示し, さらにそこにおける決定方程式とその解 (特性指数) を求めよ.

(4) (3) で求めた特性指数を λ_1, λ_2 とおく．非整数条件 $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ が成立しているとき, (2) の微分方程式の $w_1 = 0$ の近くにおける解空間の基底として

$$w_1^{\lambda_1}\varphi_1(w_1), \quad w_1^{\lambda_2}\varphi_2(w_1)$$

$(\varphi_1(w_1), \varphi_2(w_1)$ は $w_1 = 0$ で正則, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1)$ という形のものがとれる．この $\varphi_1(w_1), \varphi_2(w_1)$ をガウスの超幾何級数を用いて具体的に求めよ.

[解答例] (1) $1 - z = \dfrac{1}{w_1}$ より,

$$z = 1 - \frac{1}{w_1} = \frac{w_1 - 1}{w_1}.$$

合成関数の微分法により,

$$\frac{df}{dz} = \frac{dw_1}{dz}\frac{df}{dw_1} = \frac{1}{(1-z)^2}\frac{df}{dw_1} = w_1^2\frac{df}{dw_1}$$

だから,

$$\frac{d}{dz} = w_1^2\frac{d}{dw_1}.$$

積の微分法により,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right) = w_1^2 \frac{d}{dw_1}\left(w_1^2 \frac{df}{dw_1}\right) = w_1^2\left(2w_1 \frac{df}{dw_1} + w_1^2 \frac{d^2 f}{dw_1^2}\right) = w_1^4 \frac{d^2 f}{dw_1^2} + 2w_1^3 \frac{df}{dw_1}$$

だから,

$$\frac{d^2}{dz^2} = w_1^4 \frac{d^2}{dw_1^2} + 2w_1^3 \frac{d}{dw_1}.$$

(2) ガウスの超幾何微分方程式 (5.3) を (1) を使って書き換えていくと,

$$\begin{aligned}
&\left\{z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\frac{d}{dz} - \alpha\beta\right\} f \\
= &\left\{\frac{w_1 - 1}{w_1} \cdot \frac{1}{w_1}\left(w_1^4 \frac{d^2}{dw_1^2} + 2w_1^3 \frac{d}{dw_1}\right) + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)\frac{w_1 - 1}{w_1}\right) w_1^2 \frac{d}{dw_1} - \alpha\beta\right\} f \\
= &\left\{(w_1 - 1)w_1^2 \frac{d^2}{dw_1^2} + 2(w_1 - 1)w_1 \frac{d}{dw_1} + (\alpha+\beta+1-(\alpha+\beta-\gamma+1)w_1)w_1 \frac{d}{dw_1} - \alpha\beta\right\} f \\
= &\left\{(w_1 - 1)w_1^2 \frac{d^2}{dw_1^2} + (\alpha+\beta-1-(\alpha+\beta-\gamma-1)w_1)w_1 \frac{d}{dw_1} - \alpha\beta\right\} f \;=\; 0.
\end{aligned}$$

(3) (2) の等式をオイラー作用素 $D_{w_1} = w_1 \dfrac{d}{dw_1}$ を用いてさらに書き換える. 演習 5.6 と同様に

$$w_1^2 \frac{d^2}{dw_1^2} = D_{w_1}(D_{w_1} - 1)$$

となることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
&\left\{(w_1 - 1)w_1^2 \frac{d^2}{dw_1^2} + (\alpha+\beta-1-(\alpha+\beta-\gamma-1)w_1)w_1 \frac{d}{dw_1} - \alpha\beta\right\} f \\
= &\left\{(w_1 - 1)D_{w_1}(D_{w_1} - 1) + (\alpha+\beta-1-(\alpha+\beta-\gamma-1)w_1)D_{w_1} - \alpha\beta\right\} f \\
= &\left\{(w_1 - 1)D_{w_1}^2 + (\alpha+\beta-(\alpha+\beta-\gamma)w_1)D_{w_1} - \alpha\beta\right\} f \;=\; 0
\end{aligned}$$

となる. 最後の等式の両辺を $w_1 - 1$ で割ると定義 5.12 の (5.5) の形になるので, この微分方程式は $w_1 = 0$ を確定特異点にもつ. 決定方程式は

$$\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 0$$

となり, 特性指数は $\lambda = \alpha, \beta$ である.

(4) $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$ とし, 非整数条件 $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ が成立しているとする. (3) の微分方程式 (両辺を $w_1 - 1$ で割る前の式) の両辺を -1 倍して整理すると,

$$\{(D_{w_1} - \alpha)(D_{w_1} - \beta) - w_1(D_{w_1} - \alpha - \beta + \gamma)D_{w_1}\} f = 0$$

と書けるので, $\varphi_1(w_1)$ が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} & \{(D_{w_1}-\alpha)(D_{w_1}-\beta)-w_1(D_{w_1}-\alpha-\beta+\gamma)D_{w_1}\}(w_1^\alpha\varphi_1(w_1)) \\ = \;& w_1^\alpha\{D_{w_1}(D_{w_1}+\alpha-\beta)-w_1(D_{w_1}-\beta+\gamma)(D_{w_1}+\alpha)\}\varphi_1(w_1) \;=\; 0 \end{aligned}$$

となる. 上式は微分方程式 (5.9) の β,γ をそれぞれ $\gamma-\beta,\alpha-\beta+1$ に置き換え, z を w_1 に置き換えた方程式を $\varphi_1(w_1)$ が満たすことを意味するので,

$$\varphi_1(w_1)=F(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1;w_1)$$

を得る. $\varphi_2(w_1)$ については, 今の議論の α と β を入れ替えて同様に考えれば,

$$\varphi_2(w_1)=F(\gamma-\alpha,\beta,\beta-\alpha+1;w_1)$$

を得る. □