４章演習問題解答例

演習 4.6 (1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき, 次の式を示せ:

$$\begin{aligned}(1-2^{1-s})\zeta(s) &= 1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\\ (1-2^{-s})\zeta(s) &= 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}.\end{aligned}$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ:

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots,\\ &1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots.\end{aligned}$$

[解答例] (1)

$$\begin{aligned}(1-2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n)^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^s}+\frac{1}{(2m)^s}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m)^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^s}-\frac{1}{(2m)^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-2^{-s})\zeta(s) &= \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^s}+\frac{1}{(2m)^s}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^s}.\end{aligned}$$

定理 4.5 (1) より, 式の各項の無限級数は絶対収束するので, 値は足す順番によらないことに注意.

(2) 1 つめの級数は (1) の 1 つめの式で $s=2$ としたものである. $B_2=1/6$ より

$$\zeta(2)=(-1)^{1+1}\frac{(2\pi)^2}{2}\cdot\frac{B_2}{2!}=\frac{\pi^2}{6}$$

だから,

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)=\frac{\pi^2}{12}.$$

2 つめの級数は (1) の 2 つめの式で $s=4$ としたものである. $B_4=-1/30$ より

$$\zeta(4)=(-1)^{2+1}\frac{(2\pi)^4}{2}\cdot\frac{B_4}{4!}=\frac{\pi^4}{90}$$

だから,

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots=\left(1-\frac{1}{16}\right)\zeta(4)=\frac{\pi^4}{96}.$$

□

演習 4.7 式 (4.3) を使って $\zeta(1/2)$ の値を小数点以下第 5 位まで正確に計算せよ.

[解答例] 式 (4.3) で $s=1/2$, $N=4$, $M=6$ とすると,

$$\begin{aligned}\zeta\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{4}+\frac{B_2}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}+\frac{B_4}{4!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\frac{1}{4^{\frac{7}{2}}}\\ &\quad+\frac{B_6}{6!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{2}+4\right)\frac{1}{4^{\frac{11}{2}}}+R_6\\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}-4-\frac{1}{4}+\frac{1}{192}-\frac{1}{49,152}+\frac{9}{18,874,368}+R_6\\ &= -1.46035448...+R_6\end{aligned}$$

を得る. 後で気づいたのだが, 実は下記の注意により, この計算結果は問題文で要求されている精度よりも少し正確である. □

注意. 式 (4.3) の誤差項 R_M には本文で述べたよりもっと精密な評価があることを見落としていた[1]ので, ここを借りて補足する. M が偶数のとき (4.3) を B_{M+2} の項まで計算すると, R_M の部分は

$$\begin{aligned}R_M &= \frac{B_{M+2}}{(M+2)!}\frac{(s)_{M+1}}{N^{s+M+1}}-\frac{(s)_{M+2}}{(M+2)!}\int_N^\infty\frac{B_{M+2}(x-[x])}{x^{s+M+2}}dx\\ &= \frac{(s)_{M+2}}{(M+2)!}\frac{B_{M+2}}{(s+M+1)N^{s+M+1}}-\frac{(s)_{M+2}}{(M+2)!}\int_N^\infty\frac{B_{M+2}(x-[x])}{x^{s+M+2}}dx\\ &= \frac{(s)_{M+2}}{(M+2)!}\int_N^\infty\frac{B_{M+2}-B_{M+2}(x-[x])}{x^{s+M+2}}dx\end{aligned}$$

[1] 第 2 章の §2.7.2 (スターリング級数) で同じような計算をしていたのに, うっかりしていました.

となる. よって, $|B_{M+2} - B_{M+2}(x-[x])| \le 2|B_{M+2}|$ より,

$$|R_M| \le \frac{2|(s)_{M+2}B_{M+2}|}{(M+2)!(\sigma+M+1)N^{\sigma+M+1}} \qquad (\sigma = \mathrm{Re}(s))$$

と, 本文で述べたより精密な評価ができる.

$s = 1/2$, $N = 4$ のとき, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$ なので,

$$\begin{aligned} |R_4| &\le 2 \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6} \cdot \frac{1}{42\cdot 720\cdot \frac{11}{2}\cdot 4^{\frac{11}{2}}} = 0.0000009536..., \\ |R_6| &\le 2 \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{2^8} \cdot \frac{1}{30\cdot 40320\cdot \frac{15}{2}\cdot 4^{\frac{15}{2}}} = 0.00000005327... \end{aligned}$$

となる. 従って, 小数点以下第 5 位まで正確に計算するには B_4 の項まで計算すれば十分であり, B_6 の項まで計算した上記の結果は, 求められている精度より 1 桁程度正確である. □

演習 4.11 式 (4.4) とガンマ関数の公式 (オイラーの反転公式やルジャンドルの公式) を使って, 定理 4.8 の後半の等式 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ を示せ.

[解答例] ルジャンドルの公式により,

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = 2^s\sqrt{\pi}\Gamma(1-s).$$

また, オイラーの反転公式により

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$$

だから,

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

上記の式と (4.4) により,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}\cdot\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\pi}\sqrt{\pi}\,2^s\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ &= \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\pi}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ &= \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\pi}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) \\ &= \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s). \end{aligned}$$

よって,

$$\hat{\zeta}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)=\hat{\zeta}(1-s).$$

□

演習 4.22 k を任意の自然数とする.

(1) $\sigma>1$ のとき, 広義積分

$$\int_1^\infty \frac{(\log x)^k}{x^\sigma}dx$$

が収束することを示せ (ヒント: まずは $u=\log x$ とおいて置換積分してみる).

(2) 無限級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log n)^k}{n^s}$$

は $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき絶対収束し, また, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Re}(s)\geq 1+\varepsilon$ で一様収束することを示せ.

[解答例] (1) $u=\log x$ とおくと $x=e^u$, $dx=e^u du$ で, 任意の $T>0$ に対し

$$\begin{aligned}\int_1^T \frac{(\log x)^k}{x^\sigma}dx &= \int_0^{\log T}\frac{u^k}{e^{\sigma u}}e^u du=\int_0^{\log T} e^{-(\sigma-1)u}u^k du\\ &= \int_0^{(\sigma-1)\log T} e^{-v}\frac{v^k}{(\sigma-1)^k}\frac{dv}{\sigma-1} \qquad (v=(\sigma-1)u)\\ &= \frac{1}{(\sigma-1)^{k+1}}\int_0^{(\sigma-1)\log T} e^{-v}v^k dv.\end{aligned}$$

ここで, 最後の積分の部分は $T\to\infty$ とすると $\Gamma(k+1)=k!$ となる. よって, $T\to\infty$ とすると,

$$\lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{(\log x)^k}{x^\sigma}dx=\frac{k!}{(\sigma-1)^{k+1}}.$$

(2) $\sigma=\mathrm{Re}(s)>1$ とする. $f(x)=\dfrac{(\log x)^k}{x^\sigma}$, $a=1$, $b=N$ (任意の自然数), $M=1$ としてオイラー・マクローリンの和公式を適用すると

$$\sum_{n=1}^N\left|\frac{(\log n)^k}{n^s}\right|=\sum_{n=1}^N f(n)=\int_1^N f(x)dx+\frac{1}{2}f(N)+\int_1^N B_1(x-[x])f'(x)dx$$

を得る. (1) より $N\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_1^N f(x)dx$ は収束する. また, ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^k}{x^\sigma}=\lim_{x\to\infty}\frac{k(\log x)^{k-1}}{\sigma x^\sigma}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{k!}{\sigma^k x^\sigma}=0$$

だから, $N \to \infty$ のとき $f(N) \to 0$ となる. 最後の積分については, まず $B_1(x) = x - 1/2$ より常に $|B_1(x-[x])| \leq 1/2$ で, それから

$$f'(x) = \frac{k(\log x)^{k-1} - \sigma(\log x)^k}{x^{\sigma+1}}$$

より, $x \geq 1$ において

$$|f'(x)| \leq \frac{k(\log x)^{k-1}}{x^{\sigma+1}} + \frac{\sigma(\log x)^k}{x^{\sigma+1}}$$

となるので,

$$\int_1^N |B_1(x-[x])f'(x)|dx \leq \frac{1}{2}\left(k\int_1^N \frac{(\log x)^{k-1}}{x^{\sigma+1}}dx + \sigma\int_1^N \frac{(\log x)^k}{x^{\sigma+1}}dx\right)$$

となる. (1) より右辺は $N \to \infty$ のとき収束するので, $\displaystyle\int_1^N B_1(x-[x])f'(x)dx$ も収束する. 以上より, $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^s}$ が絶対収束することがいえた.

また, 任意の ε に対し, $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon$ のとき $\left|\dfrac{(\log n)^k}{n^s}\right| \leq \dfrac{(\log n)^k}{n^{1+\varepsilon}}$ で, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\varepsilon}}$ は収束するので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^s}$ は $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon$ において一様収束する. □

演習 4.23 $\zeta(s)$ を $s > 1$ における実数関数とみなすとき, 対数的凸であることを示せ.

[解答例] $s > 1$ において $(\log\zeta(s))'' \geq 0$ となることを示せばよい. 演習 4.22 (2) を用いると, 定理 4.21 (2) の両辺を -1 倍して右辺を項別に微分した級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\log n}{n^s} \quad \left(< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^s}\right)$$

は任意の $\varepsilon > 0$ に対し $s \geq 1+\varepsilon$ で一様収束することがいえる. 従って項別微分が可能で,

$$(\log\zeta(s))'' = \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\log n}{n^s} > 0 \qquad (s > 1)$$

を得る. □

演習 4.28 (1) $\xi(0)$ の値を求めよ.

(2) $\rho \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\xi(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \text{ は } \zeta(s) \text{ の非自明な零点}$$

を示せ.

[解答例] まず,

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\zeta(s)$$

に注意.

(1) 定理 4.5 (3) より $\zeta(0)=-1/2$ なので, $\xi(0)=\pi^0\Gamma(1)(-1)\zeta(0)=1/2$.

(2) ($\Leftarrow$) $\zeta(\rho)=0$, ρ は負の偶数ではないとする. $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$ は負の偶数でのみ極をとるので, $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)$ は $s=\rho$ で極をとらない. よって $\xi(\rho)=0$.

($\Rightarrow$) $\xi(\rho)=0$ とする. $\pi^{-\frac{s}{2}}$, $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$, $s-1$, $\zeta(s)$ はいずれも $\mathrm{Re}(s)>1$ において零点をとらないので, $\mathrm{Re}(\rho)\leq 1$ である. また, 関数等式 $\xi(1-s)=\xi(s)$ により $\xi(1-\rho)=0$ でもあるから, $\mathrm{Re}(1-\rho)\leq 1$, すなわち $0\leq\mathrm{Re}(\rho)$ となり, ρ は負の偶数ではないことがいえる. それから, $\xi(1)=\xi(0)=1/2\neq 0$ より, $\rho\neq 1$ である. 従って $\pi^{-\frac{s}{2}}$, $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$, $s-1$ はいずれも $s=\rho$ で零点をとらないので, $\zeta(\rho)=0$ である他はない. よって, ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点である. □

演習 4.29 (1) 定理 4.14 を使って,

$$\xi(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}(\theta(x)-1)\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\log x\right)dx,$$

および, $s=1/2+\sqrt{-1}\,t$ とおくことで,

$$\xi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\,t\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}(\theta(x)-1)\cos\left(\frac{t\log x}{2}\right)dx$$

となることを示せ.

(2) $\xi(s)$ の $s=1/2$ におけるテイラー級数展開の係数は実数で, 偶数べきの項のみからなること, すなわち,

$$\xi(s)=\sum_{n=0}^\infty a_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}\qquad(a_{2n}\in\mathbb{R})$$

という形をしていることを示せ.

[解答例] (1) 定理 4.14 により,

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\hat{\zeta}(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty\frac{x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}}{2x}(\theta(x)-1)dx.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}}{2x} &= x^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}+x^{-\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)}}{2} = x^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{e^{\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)\log x}+e^{-\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)\log x}}{2} \\ &= x^{-\frac{3}{4}}\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\log x\right)\end{aligned}$$

だから, 求める式

$$\xi(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}(\theta(x)-1)\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\log x\right)dx$$

を得る. 後半の式は, 一般に $\cosh(\sqrt{-1}\,z)=\cos z$ となることに注意すれば得られる.

(2) $\xi(1/2+\sqrt{-1}\,t)$ は t の関数としても整関数で, (1) の後半の式より, t が実数のときは実数値をとる. 従って $t=0$ において (実解析関数として)

$$\xi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m t^m \qquad (c_m\in\mathbb{R})$$

という形にテイラー級数展開できる. また, (1) の後半の式より $\xi(1/2+\sqrt{-1}(-t))=\xi(1/2+\sqrt{-1}\,t)$ (偶関数) だから, $c_{2n+1}=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を得る. よって上記のべき級数は偶数べきの項のみからなる. そこで $t=\sqrt{-1}(1/2-s)$ を代入すれば,

$$\xi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}\left(\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-s\right)\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

を得る. □