4　リーマンゼータ関数

複素変数 s に対し, 無限級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は $\mathrm{Re}(s) > 1$ のときに絶対収束し, この範囲で正則な関数となる. さらに解析接続により, $\zeta(s)$ は $\mathbb{C} - \{1\}$ で正則, $s = 1$ で 1 位の極をもつ有理型関数として再定義される. この $\zeta(s)$ は**リーマンゼータ関数**と呼ばれ, 整数論 (特に素数の分布) への応用などから多くの数学者の興味の対象となってきた.

4.1　オイラー・マクローリンの和公式とリーマンゼータ関数

本節ではまず [2, 第 5 章], [3, 第 6 章] を参考に, 応用範囲の広いオイラー・マクローリンの和公式を用いて $\zeta(s)$ を調べる方法を紹介する.

4.1.1　オイラー・マクローリンの和公式

定理 4.1 (オイラー・マクローリンの和公式) a, b を $a \leq b$ なる整数, M を自然数, $f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上で M 回連続微分可能な (複素数値) 関数とするとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \\ &\quad - \frac{(-1)^M}{M!} \int_a^b B_M(x - [x]) f^{(M)}(x) dx.\end{aligned}$$

ここで, B_{k+1} はベルヌーイ数, $B_M(x)$ はベルヌーイ多項式, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. また, $M = 1$ のときは $\displaystyle\sum_{k=1}^{M-1}$ の項は出てこない.

[証明] $a = b$ のときは明らか. 以下 $a < b$ とする. $g(x)$ を区間 $[0, 1]$ 上で M 回連続微分可能な関数とする. 第 1 章で学んだベルヌーイ多項式の性質 (系 1.7, 定理 1.8, 系 1.9) より,

$$\begin{aligned}&B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \\ &B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ &B_k(1) = B_k(0) = (-1)^k B_k = B_k \quad (k = 2, 3, 4, \ldots)\end{aligned}$$

であることを思い出しつつ, 部分積分法を繰り返すと,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)dx &= \int_0^1 B_1'(x)g(x)dx = [B_1(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)g'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}(g(1)+g(0)) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_2'(x)g'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}(g(1)+g(0)) - \frac{1}{2}[B_2(x)g'(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 B_2(x)g''(x)dx \\
&= \frac{1}{2}(g(1)+g(0)) - \frac{B_2}{2}(g'(1)-g'(0)) + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 B_3'(x)g''(x)dx \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2}(g(1)+g(0)) - \sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(g^{(k)}(1)-g^{(k)}(0)) \\
&\quad + \frac{(-1)^M}{M!}\int_0^1 B_M(x)g^{(M)}(x)dx.
\end{aligned}$$

さて, 上記で $g(x)=f(x+n)$ (n は $a \le n \le b-1$ なる整数) とすると,

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(x)dx &= \frac{1}{2}(f(n+1)+f(n)) - \sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(f^{(k)}(n+1)-f^{(k)}(n)) \\
&\quad + \frac{(-1)^M}{M!}\int_n^{n+1} B_M(x-[x])f^{(M)}(x)dx
\end{aligned}$$

を得る. この式を $n=a$ から $n=b-1$ まで足し合わせ, 両辺に $\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$ を加えると求める等式が得られる. □

オイラー・マクローリンの公式は応用範囲が広く, 例えば第 1 章や第 2 章のいくつかの結果をこの公式から得ることもできる.

例 4.2 (べき乗和の公式) m を自然数とし, オイラー・マクローリンの公式で $f(x)=x^m$, $a=0$, $b=N$ (任意の自然数), $M=m+1$ とすると, $f^{(k)}(x)=\frac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}$ ($k=1,2,\ldots,m-1$), $f^{(m)}(x)=m!$, $f^{(m+1)}(x)=0$ なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n^m &= \int_0^N x^m dx + \frac{N^m}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{m!}{(m-k)!}N^{m-k} \\
&= B_0\frac{N^{m+1}}{m+1} + B_1N^m + \sum_{j=2}^{m}\frac{m!}{j!(m-j+1)!}B_jN^{m-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} B_j\frac{N^{m-j+1}}{m-j+1}
\end{aligned}$$

となり, べき乗和の公式 (定理 1.1) が得られる.

例 4.3 (オイラー定数) オイラー・マクローリンの公式で $f(x) = x^{-1}$, $a = 1$, $b = N$ (任意の自然数) とすると, $f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-1-k}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} &= \int_1^N \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}\left(\frac{1}{N^{k+1}} - 1\right) - \int_1^N \frac{B_M(x-[x])}{x^{M+1}} dx \\
&= \log N + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{k+1}\left(1 - \frac{1}{N^{k+1}}\right) - \int_1^N \frac{B_M(x-[x])}{x^{M+1}} dx.
\end{aligned}$$

ここで, $B_M(x-[x])$ は有界なので, $|B_M(x-[x])|$ の最大値を L_M とおくと,

$$\int_1^N \left|\frac{B_M(x-[x])}{x^{M+1}}\right| dx \le L_M \int_1^N \frac{1}{x^{M+1}} dx = \frac{L_M}{M}\left(1 - \frac{1}{N^M}\right).$$

特に, $N \to \infty$ のときに上記の積分は絶対収束する. よって, $1/2 = B_1$ に注意して,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{k+1} - \int_1^\infty \frac{B_M(x-[x])}{x^{M+1}} dx$$

を得る. 左辺の極限値は第 2 章で用いたオイラー定数である.

例 4.4 (スターリングの公式) オイラー・マクローリンの公式で $f(x) = \log x$, $a = 1$, $b = N$ (任意の自然数), $M = 2$ とすると, $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! x^{-k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ なので,

$$\begin{aligned}
\log N! &= \sum_{n=1}^{N} \log n = \int_1^N \log x \, dx + \frac{1}{2}\log N + \frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{N} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_1^N \frac{B_2(x-[x])}{x^2} dx \\
&= [x\log x - x]_1^N + \frac{1}{2}\log N + \frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{N} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_1^N \frac{B_2(x-[x])}{x^2} dx \\
&= \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - N + \underbrace{1 + \frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{N} - 1\right) + \frac{1}{2}\int_1^N \frac{B_2(x-[x])}{x^2} dx}_{a_N \text{ とおく}}.
\end{aligned}$$

ここで, a_N の部分は $N \to \infty$ のとき収束する (最後の積分の部分が収束することは例 4.3 と同様に, $B_2(x-[x])$ が有界であることからいえる). その極限値は, 第 2 章の (2.7) 式の下の部分と同様にすると, $\lim_{N\to\infty} a_N = \log\sqrt{2\pi}$ であることがいえる.

一方, 正の実数 $s>0$ に対し, オイラー・マクローリンの公式で $f(x)=\log(s+x)$, $a=0$, $b=N$, $M=1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\log(s+n) &= \int_0^N \log(s+x)dx+\frac{1}{2}(\log s+\log(s+N))+\int_0^N \frac{B_1(x-[x])}{s+x}dx \\ &= [(s+x)\log(s+x)-x]_0^N+\frac{1}{2}(\log s+\log(s+N))+\int_0^N \frac{B_1(x-[x])}{s+x}dx \\ &= \left(s+N+\frac{1}{2}\right)\log(s+N)-N-\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s+\int_0^N \frac{B_1(x-[x])}{s+x}dx.\end{aligned}$$

以上より,

$$\log\frac{N!N^s}{s(s+1)\cdots(s+N)}=a_N+\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-\left(s+N+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+N}{N}-\int_0^N \frac{B_1(x-[x])}{s+x}dx.$$

ここで $N\to\infty$ とすると, 左辺は $\log\Gamma(s)$ となる (定義 2.1). 右辺については, まず a_N は $\log\sqrt{2\pi}$ に収束し, また,

$$\left(s+N+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+N}{N}=\left(s+\frac{1}{2}\right)\log\underbrace{\left(1+\frac{s}{N}\right)}_{\to 1}+\log\underbrace{\left(1+\frac{s}{N}\right)^N}_{\to e^s}\to s \qquad (N\to\infty)$$

だから, 最後の積分の部分も収束することがいえる. よって,

$$\log\Gamma(s)=\log\sqrt{2\pi}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s\underbrace{-\int_0^\infty \frac{B_1(x-[x])}{s+x}dx}_{\mu(s)}$$

を得る. さらに, $\mu(s)$ を部分積分法を繰り返して展開していけば §2.7.2 でやったようにスターリング級数が得られる.

4.1.2　$\zeta(s)$ の解析接続と負整数での値

定理 4.5 (1) $\mathrm{Re}(s)>1$ ならば, 無限級数 $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は絶対収束する. また, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Re}(s)\geq 1+\varepsilon$ の範囲で一様収束する. 従って, (定理 3.28 より) $\zeta(s)$ は複素変数 s に関して $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則な関数となる.

(2) $\zeta(s)$ は $s=1$ で 1 位の極をもち $\mathbb{C}-\{1\}$ で正則な有理型関数として解析接続される. なお, $s=1$ における $\zeta(s)$ の留数は 1 である.

(3) m を自然数とするとき,

$$\zeta(1-m)=-\frac{B_m}{m}.$$

[証明] $s \in \mathbb{C}$ に対し, $f(x) = x^{-s}$ $(x > 0)$ とおくと, $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \underbrace{s(s+1)\cdots(s+k-1)}_{\text{以下これを } (s)_k \text{ と略記}} x^{-s-k}.$$

$s \neq 1$ のとき, オイラー・マクローリンの公式で $a = 1$, $b = N$ (任意の自然数) とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{N^{s-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N^s}\right) + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(s)_k \left(1 - \frac{1}{N^{s+k}}\right) \\ &\quad - \frac{(s)_M}{M!}\int_1^N B_M(x - [x])x^{-s-M}dx \qquad (4.1)\end{aligned}$$

を得る.

(1) $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ とする. 式 (4.1) で $s = \sigma$, $M = 1$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\sigma-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N^\sigma}\right) - \sigma\int_1^N B_1(x - [x])x^{-\sigma-1}dx.$$

$\sigma > 1$ より, $N \to \infty$ のとき右辺は収束する (最後の積分は例 4.3 と同様にして絶対収束することがいえる). よって, $\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は絶対収束することがいえた. また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ ならば $\displaystyle\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ で, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ が収束するので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ において一様収束する.

(2) $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき式 (4.1) において $N \to \infty$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(s)_k - \frac{(s)_M}{M!}\int_1^\infty B_M(x - [x])x^{-s-M}dx. \qquad (4.2)$$

ここで, 例 4.3 と同様にすれば, 右辺の最後の積分は $\mathrm{Re}(s) > 1 - M$ ならば絶対収束することがいえる. よって, (4.2) の右辺は $\mathrm{Re}(s) > 1 - M$ の範囲での有理型関数として意味をもち, $\zeta(s)$ のこの範囲への解析接続を与える. また, $s = 1$ で 1 位の極をもち, 留数は 1 であることも (4.2) よりわかる. M は任意の自然数なので, (2) の主張を得る.

(3) 式 (4.2) において $s = 1 - m$, $M = m + 1$ とすると, $(s)_{M-1} = (1-m)(2-m)\cdots(m-m) = 0$, また同様に $(s)_M = 0$ だから,

$$\zeta(1-m) = -\frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(1-m)(2-m)\cdots(k-m).$$

ただし $m=1$ のときは $\sum_{k=1}^{m-1}$ の項は出てこず,

$$\zeta(0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -B_1$$

となる. $m \geq 2$ のときは,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(1-m)\cdots(k-m) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(-1)^k(m-1)\cdots(m-k) \\
= \ & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{m!}{(m-(k+1))!} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k B_{k+1}\begin{pmatrix} m \\ k+1 \end{pmatrix} \\
= \ & -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} B_{k+1}\begin{pmatrix} m \\ k+1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{m} B_k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
\zeta(1-m) &= -\frac{1}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\sum_{k=2}^{m} B_k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} B_0 - \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + 1 - \frac{1}{m}\sum_{k=2}^{m} B_k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \\
&= 1 - \frac{1}{m}\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} B_k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}}_{m} - \frac{B_m}{m} = -\frac{B_m}{m}
\end{aligned}$$

を得る. 最後の部分はベルヌーイ数の満たす漸化式 (定義 1.2) による. □

上記定理の (3) で, 特に m が 3 以上の奇数の場合は系 1.7 より $B_m = 0$ だから, $\zeta(1-m) = 0$ となる. つまり, $\zeta(s)$ は負の偶数において零点をとる. これらを $\zeta(s)$ の**自明な零点**と呼ぶことがある.

また, 後で示す関数等式 (定理 4.8) と (3) を組み合わせると, m が 2 以上の自然数のとき

$$-\frac{B_m}{m} = 2(2\pi)^{-m}(m-1)!\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\zeta(m)$$

となる. この式は m が奇数のときは両辺が 0 となり意味をなさないが, m が偶数のときは $\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) = (-1)^{\frac{m}{2}}$ なので,

$$\zeta(m) = (-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{(2\pi)^m}{2} \cdot \frac{B_m}{m!}$$

となり, 正の偶数における $\zeta(s)$ の値も分かる (この値自体は既に第 3 章, 系 3.46 でも示している).

3 以上の奇数における $\zeta(s)$ の値については上記だけでは分からない. $\zeta(3)$ が無理数であることがアペリーによって証明されている (1978 年). また, $\zeta(5), \zeta(7), \ldots$ も無理数であることが予想されているが, 証明はされておらず, まだ未解決である.

演習 4.6 (1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき, 次の式を示せ:

$$\begin{aligned}(1-2^{1-s})\zeta(s) &= 1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\\ (1-2^{-s})\zeta(s) &= 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}.\end{aligned}$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ:

$$\begin{gathered}1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots,\\ 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots.\end{gathered}$$

4.1.3 $\zeta(s)$ の値の近似計算

式 (4.2) から (4.1) を引くと, $\mathrm{Re}(s) > 1-M$, $s \neq 1$ において

$$\begin{aligned}\zeta(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} &= \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{N^{s-1}}-\frac{1}{2N^s}+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\frac{(s)_k}{N^{s+k}}\\ &\quad \underbrace{-\frac{(s)_M}{M!}\int_N^{\infty}B_M(x-[x])x^{-s-M}dx}_{R_M\ \text{とおく}}\end{aligned}\tag{4.3}$$

を得る. この式は $\zeta(s)$ の近似値を計算するときに便利である. M が偶数のとき, $B_M(x-[x])$ のフーリエ級数展開 (定理 3.45) を考えると, $|B_M(x-[x])| \leq |B_M(0)| = |B_M|$ がいえるので, 誤差項 R_M の大きさは

$$|R_M| \leq \frac{|(s)_M B_M|}{M!}\int_N^{\infty}x^{-\sigma-M}dx = \frac{|(s)_M B_M|}{M!(\sigma+M-1)}\cdot\frac{1}{N^{\sigma+M-1}} \qquad (\sigma = \mathrm{Re}(s))$$

と評価される.

例えば $s = 1/2$ のとき, $N = 4$, $M = 6$ とすると, $B_6 = 1/42$ なので,

$$|R_6| \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6}\cdot\frac{1}{42\cdot 720\cdot\frac{11}{2}}\cdot\frac{1}{4^{\frac{11}{2}}} = 0.000000476837158203125$$

となり, 式 (4.3) を使って $\zeta(1/2)$ の値を小数点以下第 5 位まで正確に計算することができる.

演習 4.7 式 (4.3) を使って $\zeta(1/2)$ の値を小数点以下第 5 位まで正確に計算せよ.

4.2 リーマンによる $\zeta(s)$ の積分表示と関数等式の証明

定理 4.8 (関数等式) $s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ において

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$

が成立する. なお, $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ とおくと, 上の式は

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

とも書ける.

リーマンは論文「与えられた数より小さな素数の個数について」(邦訳が [1], [3] に収録されている) において, この関数等式の証明を 2 通り与えており, 今日ではそれぞれリーマンの第 1 証明, 第 2 証明と呼ばれている.

4.2.1 関数等式の第 1 証明

まず次を示す.

定理 4.9 $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx.$$

[略証] 自然数 n に対し, 置換積分 ($t = nx$ とおく) により

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{n^{s-1}}e^{-t}\frac{dt}{n} = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\right)dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx.\end{aligned}$$

(上記最後の等式について) $|z| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

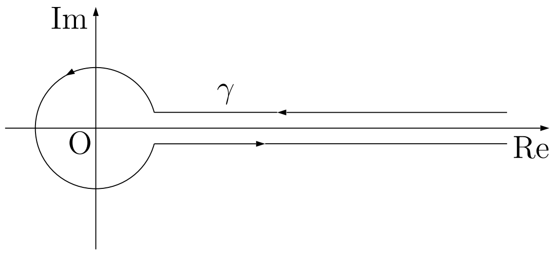
が成り立つことに注意すると, $0 < x$ のとき $|e^{-x}| < 1$ だから,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

□

定理 4.10 $s \in \mathbb{C} - \{1\}$ において,

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$



ただし, γ は右図のように, 複素平面において実軸の少し上を ∞ から原点の近くまで行き, 原点を中心とする半径 δ の円周 $(0 < \delta < 2\pi)$ に沿って原点をまわり, 実軸の少し下を行き ∞ に戻る積分路を表す. また, $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ について, $\log(-z)$ は $-\pi < \arg(-z) < \pi$ なる分枝をとる.

[略証] まず $\mathrm{Re}(s) > 1$ のときに示す. コーシーの積分定理により, 積分路 γ の円周部分の半径 δ はいくらでも小さくとってよい. $\delta \to 0$ のとき, γ に沿っての積分の値は, 実軸の上岸 $(\arg(z) = 0)$ を ∞ から原点まで行く広義積分の値と実軸の下岸 $(\arg(z) = 2\pi)$ を原点から ∞ に戻る広義積分の値の和となる. そのとき上岸では $\arg(-z) = -\pi$, 下岸では $\arg(-z) = \pi$ となるので, $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)} = |z|^{s-1} e^{(s-1)\arg(-z)\sqrt{-1}}$ に注意して $x = |z|\ (= z)$ とおけば,

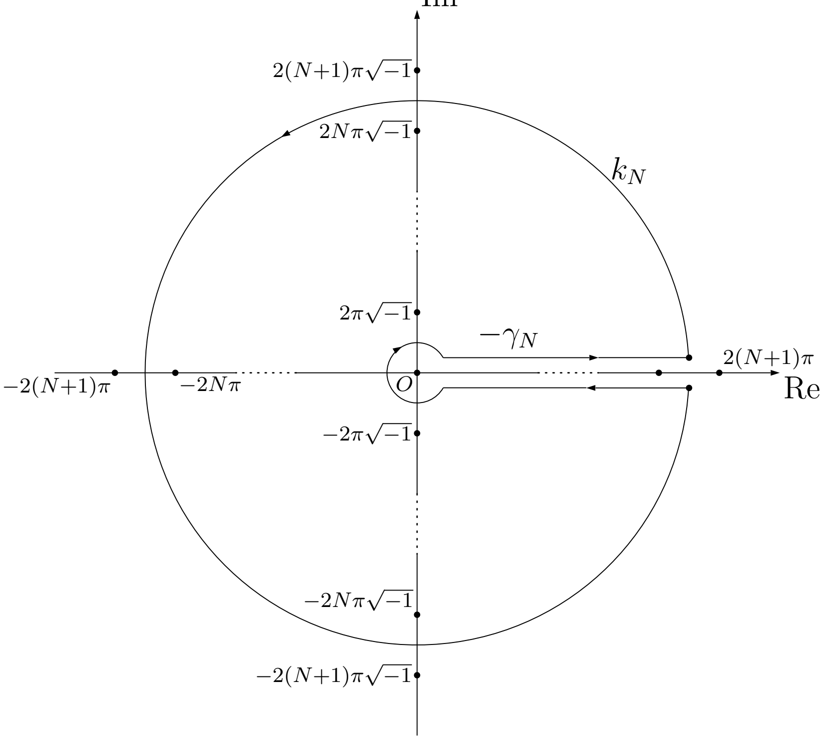
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \int_\infty^0 \frac{x^{s-1} e^{-(s-1)\pi\sqrt{-1}}}{e^x - 1} dx + \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{(s-1)\pi\sqrt{-1}}}{e^x - 1} dx \\
&= (e^{(s-1)\pi\sqrt{-1}} - e^{-(s-1)\pi\sqrt{-1}}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\
&= (e^{(s-1)\pi\sqrt{-1}} - e^{-(s-1)\pi\sqrt{-1}}) \Gamma(s)\zeta(s) \qquad (\leftarrow \text{定理 } 4.9) \\
&= 2\sqrt{-1}\sin((s-1)\pi)\Gamma(s)\zeta(s) = -2\sqrt{-1}\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) \\
&= -2\sqrt{-1}\frac{\pi}{\Gamma(1-s)}\zeta(s) \qquad (\leftarrow \text{オイラーの反転公式})
\end{aligned}$$

を得る. いま $\mathrm{Re}(s) > 1$ のときに等式を示したが, 上の式の両辺は $\mathbb{C} - \{1\}$ で正則であるため, 一致の定理 (定理 3.40) によりすべての $s \in \mathbb{C} - \{1\}$ で成立する. □

[定理 4.8 (関数等式) の証明] 各 $s \in \mathbb{C} - \{1\}$ に対し, 定理 4.10 の被積分関数 $f(z) = \dfrac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$ は $z = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ で 1 位の極をもち, その留数は

$$\mathrm{Res}[f; \pm 2n\pi\sqrt{-1}] = (\mp 2n\pi\sqrt{-1})^{s-1} = (2n\pi)^{s-1} e^{\mp\frac{\pi(s-1)}{2}\sqrt{-1}}$$

と計算できる (この留数計算は定理 3.45 の証明冒頭と同様にすればできる. また, $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, $-\sqrt{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ であることに注意). そこで, 自然数 N に対し, 次のような積分路を考える.



上図において, 外側の円周を周る経路を k_N とし, 定理 4.10 の積分路 γ の一部を γ_N, その逆向きの路を $-\gamma_N$ とおいた. すると留数定理 (定理 3.35) により,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{k_N} - \int_{\gamma_N} \right) \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \sum_{n=1}^{N} (\mathrm{Res}[f; -2n\pi\sqrt{-1}] + \mathrm{Res}[f; 2n\pi\sqrt{-1}])$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1} (e^{\frac{\pi(s-1)}{2}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{\pi(s-1)}{2}\sqrt{-1}}) = \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1} (-\sqrt{-1}e^{\frac{\pi s}{2}\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}e^{-\frac{\pi s}{2}\sqrt{-1}})$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1} \cdot 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = (2\pi)^{s-1} 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-s}}$$

を得る. ここで, $\mathrm{Re}(s) < 0$ のとき, $N \to \infty$ とすると,

$$\int_{k_N} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \to 0, \quad \int_{\gamma_N} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \to \int_{\gamma} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \qquad (N \to \infty)$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz &= (2\pi)^{s-1}2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}} \\
&= (2\pi)^{s-1}2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).
\end{aligned}
$$

両辺に $\Gamma(1-s)$ をかければ, 定理 4.10 より,

$$
\zeta(s) = (2\pi)^{s-1}2\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{4.4}
$$

ここで, オイラーの反転公式

$$
\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}
$$

より

$$
2\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}
$$

だから, これと式 (4.4) より求める関数等式を得る ($\mathrm{Re}(s) < 0$ のときに等式が成立することがいえれば, 両辺は $\mathbb{C}-\{0,1\}$ で正則なので, 一致の定理によりすべての $s \in \mathbb{C}-\{0,1\}$ について成立する).

後半の等式 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ については授業で 1 度説明したが, ここでは演習問題とする. □

演習 4.11 式 (4.4) とガンマ関数の公式 (オイラーの反転公式やルジャンドルの公式) を使って, 定理 4.8 の後半の等式 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ を示せ.

4.2.2 関数等式の第 2 証明

定理 4.9 の方法をヒントに, 今度は $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ を積分表示することを考える.

補題 4.12 $\mathrm{Re}(s) > 2$ のとき,

$$
\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right) x^{\frac{s}{2}-1}dx.
$$

[略証] 自然数 n に対し, 置換積分 ($t = \pi n^2 x$ とおく) により,

$$
\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{\frac{s}{2}-1}}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}-1}}\frac{dt}{\pi n^2} = \frac{1}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt = \pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s}.
$$

よって,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{s}{2}-1}dx=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}\right)x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

□

ここで登場した被積分関数の一部を

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}\qquad(x>0)$$

とする. 定理 4.8 の第 2 の証明は, この $\psi(x)$, あるいは, テータ関数と呼ばれる関数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}=1+2\psi(x)\qquad(x>0)$$

が次の関数等式を満たすことから導かれる:

定理 4.13 ($\theta(x)$ の関数等式)

$$\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)\qquad(x>0).$$

この式の証明については後述する. これを用いて補題 4.12 の計算を先に進めると, 次を得る:

定理 4.14 $s\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ において, 次が成立する.

$$\hat{\zeta}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\frac{x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}}{2x}(\theta(x)-1)dx.$$

[証明] 補題 4.12 および定理 4.13 により, $\mathrm{Re}(s)>2$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx\\
=\;&\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx\\
=\;&\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}(-1+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}(\theta(x^{-1})-1))dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx\\
=\;&\frac{1}{2}\int_0^1(-x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{s-1}{2}-1})dx+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{\infty}^1 y^{-\frac{s}{2}+1}y^{\frac{1}{2}}(\theta(y)-1)\frac{dy}{-y^2}}_{\text{上の式で } y=x^{-1} \text{ とおいて置換積分した}}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx\\
=\;&\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{s}x^{\frac{s}{2}}+\frac{2}{s-1}x^{\frac{s-1}{2}}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x^{\frac{1-s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}(\theta(x)-1)dx\\
=\;&\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\frac{x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}}{2x}(\theta(x)-1)dx.
\end{aligned}$$

これで, $\mathrm{Re}(s) > 2$ のときに等式を示したが, 両辺は $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ で正則なので, 一致の定理によりすべての $s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ で等式は成立する. $\square$

この定理の右辺の s を $1 - s$ に入れ替えても変わらないので, 系として定理 4.8 の関数等式 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1 - s)$ が得られる.

本節の最後に, 残っていた定理 4.13 を証明する.

[定理 4.13 の証明] 任意の $x > 0$ を固定し, t の関数 $f(t) = e^{-\pi t^2 x}$ を考える. さらに $f(t)$ に対し, 周期 1 をもつ関数

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+n)^2 x}$$

をつくる. この $F(t)$ をフーリエ級数に展開して

$$F(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi\sqrt{-1}mt}$$

となったとしよう. すると c_m は次のように計算することができる.

$$\begin{aligned}
c_m &= \int_0^1 F(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}mt} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2\pi\sqrt{-1}mt} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}m(t-n)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}mt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}mt} dt \quad (= \hat{f}(m),\ \ \hat{f} \text{ は } f \text{ のフーリエ変換}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x - 2\pi\sqrt{-1}mt} dt = e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x \left(t + \sqrt{-1}\,\frac{m}{x}\right)^2} dt \overset{(*)}{=} e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x t^2} dt \\
&= e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \qquad (\tau = \sqrt{\pi x}\, t).
\end{aligned}$$

上の式の $(*)$ の部分は, 任意の $T > 0$ に対し複素関数 $e^{-\pi x z^2}$ を $-T$, T, $T + \sqrt{-1}\frac{m}{x}$, $-T + \sqrt{-1}\frac{m}{x}$ を頂点とする長方形の外周に沿って積分するとコーシーの積分定理により 0 となるので, あとは $T \to \infty$ とすると得られる. また最後の部分は第 2 章の注意 2.18 で述べた式 (2.4) による.

上記で $t = 0$ とすると,

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = F(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi m^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

となり, 求める式を得る. $\square$

注意 4.15 f のフーリエ変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}tu} dt$$

で定めると, 上の証明中で

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)$$

という等式が得られている. これは**ポアソンの和公式**と呼ばれ, f が良い性質を満たす関数 (例えば急減少関数) でさえあれば, $e^{-\pi t^2 x}$ でなくても一般に成立する (証明も上記と同様).

4.3 $\zeta(s)$ と素数の関係・素数定理

4.3.1 オイラーの積公式

$\zeta(s)$ と素数との関係の核心には, オイラーによる次の無限積表示がある.

定理 4.16 (オイラーの積公式) $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

ここで, 右辺はすべての素数 p をわたる積を表す.

大まかな説明としては,

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots$$

に注意して右辺を展開すると

$$\frac{1}{(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r})^s} \qquad (p_1, \ldots, p_r \text{ は相異なる素数})$$

という形の項の総和になるので, 素因数分解の一意性により左辺の $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ と一致する, ということである.

[証明] 素数を小さい順に並べて $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... とおく. まず $p_1 = 2$ で割り切れない自然数を小さい順に並べて $m_{11} = 1$, $m_{12} = 3$, ... とおくと,

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1 n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_{1n}^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \cdots .$$

次に, $p_1=2, p_2=3$ のいずれでも割り切れない自然数を小さい順に並べて $m_{21}=1$, $m_{22}=5, \ldots$ とおくと,

$$\left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_{1n}^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_2 m_{1n})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_{2n}^s}=1+\frac{1}{5^s}+\cdots.$$

これを続けていき, 各自然数 k に対して, $p_1, \ldots, p_k$ のいずれでも割り切れない自然数を小さい順に並べて $m_{k1}=1, m_{k2}, m_{k3}, \ldots$ とおけば,

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)\cdot\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_{kn}^s}=1+\frac{1}{m_{k2}^s}+\cdots.$$

すると, $k\to\infty$ のとき $m_{k2}\to\infty$ となるので,

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)\cdot\zeta(s)=1$$

を得る. □

オイラーの積公式の両辺の対数をとると,

$$\log\zeta(s)=-\sum_p\log(1-p^{-s})$$

となる. さらにここで, $|z|<1$ で成り立つ式

$$-\log(1-z)=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}z^j \tag{4.5}$$

を用いれば,

$$\log\zeta(s)=\sum_p(p^{-s}+\frac{1}{2}p^{-2s}+\frac{1}{3}p^{-3s}+\cdots)=\sum_p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{jp^{js}} \tag{4.6}$$

を得る.

以下, あまり厳密でない話になるが, 式 (4.6) で $s=1$ とおくと, 両辺が発散する式

$$\log\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_p(p^{-1}+\frac{1}{2}p^{-2}+\frac{1}{3}p^{-3}+\cdots)=\sum_p\frac{1}{p}+(\text{収束項})$$

を得る. オイラー定数の存在 (命題 2.12) により, 左辺は $\log(\log\infty)$ くらいの増大度ということで, オイラーはこれを

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\log(\log\infty)$$

と書いている．この式の意味するところをもう少し明確な形で書き換えるとするならば，それは

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} \sim \log(\log x) \qquad (x \to \infty) \tag{4.7}$$

という主張になる．ここで，左辺の p は x 以下の素数全体をわたる．また記号 $\sim$ は

$$f(x) \sim g(x) :\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \to \infty)$$

という意味でとる．式 (4.7) の右辺は

$$\log(\log x) = \int_1^{\log x} \frac{du}{u} = \int_e^x \frac{dv}{v \log v} \qquad (v = e^u)$$

と書き直せる．さらに (4.7) の左辺を，素数の密度で測ったときの関数 $1/v$ の積分と考えて[1]，もう少し飛躍させると，素数の密度はおおよそ $1/\log v$ なのではないかと考えることができる[2]．19 世紀には，このような素数の分布についての議論が数学者の間で興味の対象となっていた．本章の残りの部分は，素数の分布に関して現在「素数定理」として知られている定理と，ゼータ関数を使ったその証明の概略について理解することを目標とする．

4.3.2 素数定理

実数 x に対し，$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とし，また，$\mathrm{Li}(x)$ を

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \ge 2)$$

により定まる関数 (対数積分) とする．

定理 4.17 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

ここで，記号 $\sim$ は以下の意味でとる:

$$f(x) \sim g(x) :\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \to \infty).$$

---

[1] スチルチェス積分を使って書くなら，$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とするとき，$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \int_1^x \frac{1}{v} d\pi(v)$.

[2] 上の脚注と同様に書くと，$\pi(x) = \int_1^x d\pi(v) \sim \int_e^x \frac{dv}{\log v}$ という主張になる．

$\pi(x)$ に関するこの評価は, 18 世紀末から 19 世紀初めにかけてガウスやルジャンドルによって予想されていたが, その証明のための最初の一歩は 1850 年ごろにチェビシェフによって与えられた. リーマンは 1859 年の論文「与えられた数より小さな素数の個数について」においてゼータ関数を使った画期的なアイデアを披露し, 証明の道筋をつけた. ただ, そのアイデアには (他の数学者にとって) いくつか未証明の部分が残されていた. その後 1890 年代になり, そのような部分のいくつかについて, 証明がアダマール, マンゴルト, ド・ラ・ヴァレ・プーサンにより発表され, 1896 年にはアダマールとド・ラ・ヴァレ・プーサンが独立に素数定理の完全な証明を与えた.

まず上記定理の右側の部分を示しておこう.

命題 4.18

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

[証明] 両辺の導関数は

$$\mathrm{Li}'(x) = \frac{1}{\log x}, \qquad \left(\frac{x}{\log x}\right)' = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

なので, ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log x}}{\mathrm{Li}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\log x}\right) = 1.$$

□

チェビシェフは $\pi(x)$ という捉えどころのない関数を, もう少し扱いやすい関数を使って評価した. 彼の手法には次のような結果が含まれている.

命題 4.19 (チェビシェフ)

$$\pi(x) \sim \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

ここで, n は x 以下の自然数全体をわたる. また $\Lambda(n)$ は,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & (n \text{ が素数 } p \text{ のべき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

で定義される関数である (なお, この $\Lambda(n)$ はマンゴルト関数と呼ばれている).

[証明] $x>1$ に対し, p を素数とすると,

$$\begin{aligned}\#\{l\in\mathbb{N}\mid p^l\le x\} &= (p^m\le x \text{ となるような最大の整数 } m)\\ &= [\log_p x]=\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \qquad (\log_p x \text{ を超えない最大の整数})\end{aligned}$$

なので,

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)=\sum_{p\le x}\underbrace{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p}_{\le\log x}\le\log x\sum_{p\le x}1=\pi(x)\log x.$$

ここで, p は x 以下の素数全体をわたる.

一方, 任意の $0<\delta<1$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\Lambda(n) &\ge \sum_{p\le x}\log p\ge\sum_{x^{1-\delta}<p\le x}\log p\\ &\ge \log x^{1-\delta}\sum_{x^{1-\delta}<p\le x}1=(1-\delta)\log x(\pi(x)-\pi(x^{1-\delta}))\\ &\ge (1-\delta)\log x(\pi(x)-x^{1-\delta}).\end{aligned}$$

以上より, $x\ge 2$ のとき

$$1\ \le\ \frac{\pi(x)\log x}{\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)}\ \le\ \frac{1}{1-\delta}+\frac{x}{\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)}\cdot\frac{\log x}{x^\delta}$$

となる. ここで, 後で示す補題 4.20 により $\dfrac{x}{\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)}$ は有界であり, また, ロピタルの定理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\delta}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\delta x^\delta}=0$ である. さらに δ は任意なのでいくらでも 0 に近くとれることから,

$$\frac{\pi(x)\log x}{\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)}\to 1 \qquad (x\to\infty)$$

を得る. □

補題 4.20 $x\ge 2$ のとき

$$\frac{x}{\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)}\ <\ \frac{4}{\log 2}.$$

[証明] 一般に, 自然数 M に対し, $M!$ を素因数分解して $M! = \prod_{p \le M} p^{m_p}$ となったとすると,

$$m_p = \sum_{l=1}^{\infty} (1, \ldots, M \text{ の中にある } p^l \text{ の倍数の個数}) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{M}{p^l}\right]$$

である.

ここで

$$m = \left[\frac{x}{2}\right], \qquad N = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

とおく. N を素因数分解して $N = \prod_{p \le 2m} p^{k_p}$ となったとすると, 上記より

$$k_p = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2m}{p^l}\right] - 2\left[\frac{m}{p^l}\right] \right\}$$

となるが,

$$\left[\frac{2m}{p^l}\right] - 2\left[\frac{m}{p^l}\right] = \begin{cases} 0 & (\left[\frac{2m}{p^l}\right] \text{ が偶数}) \\ 1 & (\left[\frac{2m}{p^l}\right] \text{ が奇数}) \end{cases}$$

で, とくに $2m < p^l$ ならこれは 0 となるので,

$$k_p \le \#\{l \in \mathbb{N} \mid p^l \le 2m\} = \left[\frac{\log 2m}{\log p}\right]$$

を得る. また,

$$N = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{2m}{m} \ge 2^m$$

より $\log N \ge m \log 2$. さらに, $x \ge 2$ および $m = \left[\frac{x}{2}\right]$ より $\frac{x}{4} \le m \le \frac{x}{2}$ である.

以上より,

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \Lambda(n) &\ge \sum_{n \le 2m} \Lambda(n) = \sum_{p \le 2m} \left[\frac{\log 2m}{\log p}\right] \log p \ge \sum_{p \le 2m} k_p \log p = \log N \\ &\ge m \log 2 \ge \frac{x}{4} \log 2. \end{aligned}$$

□

補題 4.20 の精度をさらに高めて $\sum_{n \le x} \Lambda(n) \sim x$ となることがいえれば, 命題 4.19 とあわせて素数定理が証明される. さて, $\Lambda(n)$ は $\zeta(s)$ と次のような関係にある.

定理 4.21 $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき,

(1) $\log \zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}$,

(2) $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

[証明] (1) $\Lambda(n)$ の定義により, $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対し,

$$\frac{\Lambda(n)}{n^s \log n} = \begin{cases} \dfrac{1}{jp^{js}} & (n = p^j,\ p \text{ は素数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

よって, 前小節の式 (4.6) により,

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{jp^{js}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}.$$

(2) は (1) の両辺を s に関して微分すると得られる; 実際, (2) の右辺は任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ で一様収束する (下記の演習 4.22 を参照) ので, 項別微分ができる. また, $\Lambda(1) = 0$ に注意. □

演習 4.22 k を任意の自然数とする.

(1) $\sigma > 1$ のとき, 広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{(\log x)^k}{x^{\sigma}} dx$$

が収束することを示せ (ヒント: まずは $u = \log x$ とおいて置換積分してみる).

(2) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^s}$$

は $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき絶対収束し, また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ で一様収束することを示せ.

演習 4.23 $\zeta(s)$ を $s > 1$ における実数関数とみなすとき, 対数的凸であることを示せ.

ここで, $x > 1$ における関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \leq x} \Lambda(n) & (x \notin \mathbb{N}) \\ \displaystyle\sum_{n \leq x} \Lambda(n) - \frac{1}{2}\Lambda(x) & (x \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

により定める (この関数は §4.2.2 の $\psi(x)$ とは何の関係もないので注意). 明らかに $\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda(n)\sim\psi(x)$ なので, 素数定理の証明は $\psi(x)\sim x$ の証明に帰着される.

定理 4.24 (マンゴルト) $x>1$ において,

$$\psi(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2})-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

ここで, ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点全体をわたる. また, $\sum_\rho$ の部分は条件収束であり, 足し合わせる順番は $|\operatorname{Im}(\rho)|$ が小さい順, すなわち

$$\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}=\lim_{T\to\infty}\sum_{|\operatorname{Im}(\rho)|<T}\frac{x^{\rho}}{\rho}$$

を意味する. なお, $-\dfrac{1}{2}\log(1-x^{-2})$ の部分は式 (4.5) より

$$-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2})=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{-2n}$$

であり, $\zeta(s)$ の自明な零点全体をわたる和になっている.

この定理の証明は次の命題の右辺の積分を 2 通りに計算することによって得られる.

命題 4.25 $x>1$ のとき, 任意の $a>1$ に対し,

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)x^{s}\frac{ds}{s}.$$

ここで, 右辺の $\displaystyle\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty}$ は $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}$ の意味でとる.

この命題を示すため, まずは次を示す.

補題 4.26 $y>0$ のとき, 任意の $a>0$ に対し,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty}y^{s}\frac{ds}{s}=\begin{cases}0 & (0<y<1)\\ \dfrac{1}{2} & (y=1)\\ 1 & (y>1).\end{cases}$$

[証明] $a < A,\ 0 < T$ なる A, T を任意にとる. $a - \sqrt{-1}T,\ A - \sqrt{-1}T,\ A + \sqrt{-1}T,$ $a + \sqrt{-1}T$ を頂点とする長方形領域で y^s/s は正則なので, コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T} y^s\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_{a-\sqrt{-1}T}^{A-\sqrt{-1}T} + \int_{A-\sqrt{-1}T}^{A+\sqrt{-1}T} + \int_{A+\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\right) y^s\frac{ds}{s}.$$

まず, 右辺の真ん中の $\displaystyle\int_{A-\sqrt{-1}T}^{A+\sqrt{-1}T}$ については,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{A-\sqrt{-1}T}^{A+\sqrt{-1}T} y^s\frac{ds}{s}\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{y^A}{A}\underbrace{\left|\int_{A-\sqrt{-1}T}^{A+\sqrt{-1}T} ds\right|}_{2T} = \frac{y^A T}{\pi A}.$$

また, $\displaystyle\int_{a-\sqrt{-1}T}^{A-\sqrt{-1}T}$ と $\displaystyle\int_{A+\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}$ については絶対値がどちらも次で抑えられる:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_a^A \frac{y^\sigma}{T}d\sigma\right| = \frac{1}{2\pi T}\left|\left[\frac{y^\sigma}{\log y}\right]_{\sigma=a}^{\sigma=A}\right| = \frac{|y^A - y^a|}{2\pi T|\log y|}.$$

よって,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T} y^s\frac{ds}{s}\right| \le \frac{|y^A - y^a|}{\pi T|\log y|} + \frac{y^A T}{\pi A}.$$

$0 < y < 1$ のとき, $A \to \infty$ とすると $y^A \to 0$ となるので,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T} y^s\frac{ds}{s}\right| \le \frac{y^a}{\pi T|\log y|}. \tag{4.8}$$

さらに $T \to \infty$ とすれば, 右辺は (従って左辺も) 0 に収束する.

$y = 1$ のときは, $s = a + \sqrt{-1}t$ とおくと $ds = \sqrt{-1}dt$ なので,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T} y^s\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+\sqrt{-1}t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a-\sqrt{-1}t}{a^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\sqrt{-1}u}{1+u^2}du \qquad (u = \frac{t}{a}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u}{1+u^2}du}_{\text{被積分関数が奇関数なので } 0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{1}{2} \qquad (u = \tan v \text{ とおくと } du = (1+u^2)dv).
\end{aligned}$$

最後に $y>1$ の場合を考える. $a-\sqrt{-1}T$, $a+\sqrt{-1}T$, $-A+\sqrt{-1}T$, $-A-\sqrt{-1}T$ を頂点とする長方形領域で y^s/s は $s=0$ で 1 位の極をもち (留数は $\lim_{s\to 0} s(y^s/s)=1$), それ以外では正則なので, 留数定理 (定理 3.35) により

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}+\int_{a+\sqrt{-1}T}^{-A+\sqrt{-1}T}+\int_{-A+\sqrt{-1}T}^{-A-\sqrt{-1}T}+\int_{-A-\sqrt{-1}T}^{a-\sqrt{-1}T}\right)y^s\frac{ds}{s}=1.$$

よって, 先程と同様に考えると,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}y^s\frac{ds}{s}-1\right|\leq\frac{|y^a-y^{-A}|}{\pi T|\log y|}+\frac{y^{-A}T}{\pi A}.$$

$y>1$ のとき, $A\to 0$ とすると $y^{-A}\to 0$ となるので,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}y^s\frac{ds}{s}-1\right|\leq\frac{y^a}{\pi T\log y}.$$

さらに $T\to\infty$ とすれば, 右辺は (従って左辺も) 0 に収束する. $\square$

[命題 4.25 の証明] 定理 4.21 (2) (およびその右辺の級数が任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Re}(s)\geq 1+\varepsilon$ で一様収束すること) より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\,\infty}^{a+\sqrt{-1}\,\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)x^s\frac{ds}{s} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)x^s\frac{ds}{s}\\ &= \lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

さらに n についての無限和を $n\leq x$ の部分と $n>x$ の部分に分けて考える. まず, $n\leq x$ の部分については有限和で, 補題 4.26 より,

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\,\infty}^{a+\sqrt{-1}\,\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\psi(x)$$

となる. $n>x$ の部分については, 式 (4.8) より

$$\begin{aligned}\left|\Lambda(n)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right| &\leq (\log n)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^a}{\pi T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}=(\log n)\frac{x^a}{n^a\pi T|\log x-\log n|}\\ &= \frac{1}{n^aT}\cdot\frac{x^a}{\pi\left(1-\frac{\log x}{\log n}\right)}\leq\frac{1}{n^aT}\cdot\underbrace{\frac{x^a}{\pi\left(1-\frac{\log x}{\log([x]+1)}\right)}}_{c\text{ とおく}}\end{aligned}$$

なので,

$$\left|\sum_{n>x}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}T}^{a+\sqrt{-1}T}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right|\leq\frac{c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}=\frac{c}{T}\zeta(a)$$

となり, $T\to\infty$ のとき 0 に収束する. □

次に, リーマンのクシー関数と呼ばれる次の関数を考える:

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\hat{\zeta}(s)=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

$\zeta(s)$ の関数等式の第 2 証明で使った積分表示 (定理 4.14) より, $\xi(s)$ は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) で, やはり関数等式 $\xi(1-s)=\xi(s)$ を満たす.

$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で零点をもたないので $\xi(s)$ もそうである. さらに $\xi(1-s)=\xi(s)$ より, $\xi(s)$ の零点全体は $0\leq\mathrm{Re}(s)\leq 1$ の範囲内にある. またそれは $\zeta(s)$ の非自明な零点全体とも一致する (演習 4.28).

さらに次の無限積表示が成立する.

定理 4.27 (アダマール)

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right).$$

ここで, ρ は $\xi(s)$ の零点全体 ($\zeta(s)$ の非自明な零点全体) をわたる. ただし, 積の順番は関数等式で対応する零点の対 (ρ と $1-\rho$) ごとにとらなければならない.

発想としては, $\sin x$ の無限積表示でオイラーが当初考えたように (第 2 章の注意 2.24), $\xi(s)$ を無限次の多項式と考えて因数分解したものであるが, 厳密に証明するにはもっと準備が必要である. アダマールは整関数の無限積表示について一般的に調べ, その結果を用いて $\xi(s)$ の無限積表示を導いた. その後, イェンセンの公式という複素関数論の定理を使って証明は簡略化されている [3, 第 2 章].

演習 4.28 (1) $\xi(0)$ の値を求めよ.

(2) $\rho\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\xi(\rho)=0\Leftrightarrow\rho\text{ は }\zeta(s)\text{ の非自明な零点}$$

を示せ.

演習 4.29 (1) 定理 4.14 を使って,

$$\xi(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^{\infty}x^{-\frac{3}{4}}(\theta(x)-1)\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\log x\right)dx,$$

および, $s=1/2+\sqrt{-1}\,t$ とおくことで,

$$\xi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\,t\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^{\infty}x^{-\frac{3}{4}}(\theta(x)-1)\cos\left(\frac{t\log x}{2}\right)dx$$

となることを示せ.

(2) $\xi(s)$ の $s=1/2$ におけるテイラー級数展開の係数は実数で, 偶数べきの項のみからなること, すなわち,

$$\xi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}\qquad(a_{2n}\in\mathbb{R})$$

という形をしていることを示せ.

[定理 4.24 の証明概略] 命題 4.25 の右辺を別の方法で計算する. 定理 4.27 の両辺の対数微分をとると,

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=\sum_{\rho}\frac{-\frac{1}{\rho}}{1-\frac{s}{\rho}}=\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}. \tag{4.9}$$

一方,

$$\xi(s)=(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

の両辺の対数微分をとると,

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{d}{ds}\left\{\log\left(\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)\right\}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \tag{4.10}$$

ここで, ワイエルシュトラスの無限積表示 (定理 2.14, 定理 3.48) により

$$\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=e^{\frac{Cs}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\qquad(C\text{ はオイラー定数})$$

なので,

$$\begin{aligned}-\frac{d}{ds}\left\{\log\left(\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)\right\} &= \frac{C}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2n}}{1+\frac{s}{2n}}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{C}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \frac{C}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-s}{2n(s+2n)}.\end{aligned}$$

よって (4.9), (4.10) より,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}-\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s}{2n(s+2n)}-\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\log\pi.$$

この式で $s=0$ とすると,

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = -1 + \sum_\rho \frac{1}{\rho} - \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\log\pi \tag{4.11}$$

なので,

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{1}{s-1} + 1 - \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{n=1}^\infty \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\
&= \frac{s}{s-1} - \sum_\rho \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^\infty \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}
\end{aligned}$$

を得る. これを命題 4.25 の右辺に適用すると,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} x^s\frac{ds}{s-1} - \sum_\rho \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} x^s\frac{ds}{\rho(s-\rho)} \\
&\quad + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} x^s\frac{ds}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} x^s\frac{ds}{s}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

となる[3]. 一般に, $x>1$ のとき, $\beta\in\mathbb{C}$ に対し $a>\mathrm{Re}(\beta)$ ならば, 補題 4.26 より

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} x^s\frac{ds}{s-\beta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a-\beta-\sqrt{-1}\infty}^{a-\beta+\sqrt{-1}\infty} x^\beta x^t\frac{dt}{t} = x^\beta \qquad (t=s-\beta)$$

だから, これを (4.12) の各項に適用すると,

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-2n}}{2n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = x - \sum_\rho\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

を得る. □

ちなみに, 定理 4.24 の右辺の定数部分は $-\log 2\pi$ となる:

命題 4.30

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi.$$

[3]実際は, 命題 4.25 の証明でやったように, 項別積分が可能かどうか等の評価を慎重に行う必要がある. 詳しくは [3, 第 3 章] を参照してほしい.

[証明] §4.1.3 の式 (4.3) で $M=1$ とおくと

$$\begin{aligned}\zeta(s)-\frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{N^{s-1}}-1\right)-\frac{1}{2N^s}-s\int_N^{\infty}B_1(x-[x])x^{-s-1}dx \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}-\int_1^N x^{-s}dx-\frac{1}{2N^s}-s\int_N^{\infty}B_1(x-[x])x^{-s-1}dx\end{aligned}$$

を得る. この式の右辺は $\mathrm{Re}(s)>0$ で意味をもつ. 特に右辺で $s=1$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\underbrace{\int_1^N x^{-1}dx}_{\log N}-\frac{1}{2N}-s\int_N^{\infty}B_1(x-[x])x^{-2}dx$$

となるが, さらに $N\to\infty$ とすると, これはオイラー定数 C に収束する. よって, $(s-1)\zeta(s)$ を $s=1$ においてテイラー級数展開して $(s-1)\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(s-1)^n$ としたとき, 最初の 2 項の係数は $c_0=1$, $c_1=C$ となる.

一方, §4.2.1 の式 (4.4) の両辺に $(s-1)$ をかけると,

$$\begin{aligned}(s-1)\zeta(s) &= -(2\pi)^{s-1}2(1-s)\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ &= -2\Gamma(2-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).\end{aligned}$$

この両辺の対数微分をとり $s=1$ とすると, 先ほど述べたことから左辺は

$$\left.\frac{C+c_2(s-1)+\cdots}{1+C(s-1)+\cdots}\right|_{s=1}=C$$

となり, 右辺は

$$-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\log 2\pi+\frac{\pi}{2}\underbrace{\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}}_{0}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=C+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}_{0}+\log 2\pi-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

となるので, 求める式を得る. □

また, この命題と式 (4.11) により, 次がいえる:

系 4.31

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}=\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\log\pi+1-\log 2\pi.$$

ここで, ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点全体をわたる (無限和は条件収束で, 足し合わせる順番は定理 4.24 と同じにとる).

定理 4.24 により,

$$\psi(x) \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

となる. これを示すには, まず, $\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ の実部が 1 より真に小さいことを示すことが重要となる. それがいえれば, $|x^{\rho-1}| = x^{\mathrm{Re}(\rho)-1} \to 0$ $(x \to \infty)$ がいえるため, 上記右辺の主張が証明できそうである (が, 実はそう簡単ではない ⋯ 詳しくは後述)。

定理 4.32 (アダマール) ρ が $\zeta(s)$ の非自明な零点ならば, $\mathrm{Re}(\rho) < 1$ である.

[証明[4]] $s \in \mathbb{C}$ とし, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$ とおく. $\sigma > 1$ とするとき, 式 (4.6) より,

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{jp^{js}}\right) = \exp\left(\sum_{p}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}\,jt\log p}}{jp^{j\sigma}}\right).$$

オイラーの公式により

$$e^{-\sqrt{-1}\,jt\log p} = \cos(jt\log p) - \sqrt{-1}\sin(jt\log p)$$

なので,

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_{p}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(jt\log p)}{jp^{j\sigma}}\right).$$

よって,

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)|^4|\zeta(\sigma+2\sqrt{-1}\,t)| = \exp\left(\sum_{p}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3+4\cos(jt\log p)+\cos(2jt\log p)}{jp^{j\sigma}}\right).$$

ここで, 一般に

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0$$

なので, 任意の $\sigma > 1$, $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)|^4|\zeta(\sigma+2\sqrt{-1}\,t)| \geq 1. \tag{4.13}$$

$\zeta(s)$ の非自明な零点 ($\xi(s)$ の零点) は $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ の範囲にしかないことは既に分かっているので, 直線 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に $\zeta(s)$ の零点が存在しないことを示せば定理の証明が終わる. そこで, $\zeta(\rho) = 0$, $\rho = 1 + \sqrt{-1}\,t$ $(t \in \mathbb{R})$ と仮定して矛盾を導く.

[4]最初に証明したのはアダマールであるが, ここに述べている証明は, 後にメルテンスにより簡略化されたバージョンである.

まず, $\zeta(s)$ は $s=1$ に極をもつので, $t \neq 0$ である. (4.13) より, 任意の $\sigma > 1$ に対し

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2\sqrt{-1}\,t)| \geq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{4.14}$$

ここで $\sigma \to 1+0$ とすると, (4.14) の左辺は収束する. 実際, $\sigma \to 1+0$ のとき $(\sigma-1)\zeta(\sigma) \to 1$, $|\zeta(\sigma+2\sqrt{-1}\,t)| \to |\zeta(1+2\sqrt{-1}\,t)| < \infty$ で, また仮定より $\zeta(1+\sqrt{-1}\,t)=0$ だから

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)}{\sigma-1}\right| &= \left|\frac{\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)-\zeta(1+\sqrt{-1}\,t)}{\sigma-1}\right| \\
&\to \left|\frac{d}{d\sigma}\zeta(\sigma+\sqrt{-1}\,t)\Big|_{\sigma=1}\right| = |\zeta'(1+\sqrt{-1}\,t)| < \infty
\end{aligned}$$

である. しかし, (4.14) の右辺は $\sigma \to 1+0$ のとき $+\infty$ に発散するので, これは矛盾である. □

定理 4.32 により $|x^{\rho-1}| \to 0$ $(x \to \infty)$ となるため, 直感的には $\displaystyle\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho} \to 0$ $(x \to \infty)$ がいえて, $\psi(x) \sim x$, さらには素数定理の証明が終わるように思えるが, 実際には $\displaystyle\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho}$ が条件収束であるため, 項別に極限がとれるのかどうかが明らかでない. そこで $\psi(x)$ の代わりに, これを積分した関数

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt \qquad (x>1)$$

を考える. 実はこの $\psi_1(x)$ の評価から $\psi(x)$ の評価を導くことが可能で (下記の補題 4.33), また, $\psi(x)$ の評価で問題となる $\displaystyle\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho}$ の部分が, $\psi_1(x)$ の評価においては $\displaystyle\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}$ となり, これは $x>1$ において絶対一様収束するため, 項別に極限がとれるのである.

補題 4.33 $\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ ならば $\psi(x) \sim x$ が成立する.

[証明] 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\psi_1((1+\varepsilon)x) - \psi_1(x) = \int_x^{(1+\varepsilon)x} \psi(t)dt \geq \psi(x)\int_x^{(1+\varepsilon)x} dt = \psi(x)\varepsilon x$$

(途中の不等号は $\psi(t)$ が広義単調増加であることによる) より,

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{1}{\varepsilon x^2}(\psi_1((1+\varepsilon)x) - \psi_1(x)) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\psi_1((1+\varepsilon)x)}{((1+\varepsilon)x)^2}(1+\varepsilon)^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2}\right).$$

ここで, $\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ が成立するならば,

$$\frac{\psi_1((1+\varepsilon)x)}{((1+\varepsilon)x)^2} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2} \qquad (x \to \infty)$$

となるので,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \le \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(2+\varepsilon).$$

すると, $\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるので,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \le 1$$

が成立する.

一方, 任意の $1 > \varepsilon > 0$ に対して

$$\psi_1(x) - \psi_1((1-\varepsilon)x) = \int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \psi(t)dt \le \psi(x)\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} dt = \psi(x)\varepsilon x$$

より,

$$\frac{\psi(x)}{x} \ge \frac{1}{\varepsilon x^2}(\psi_1(x) - \psi_1((1-\varepsilon)x)) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{\psi_1((1-\varepsilon)x)}{((1-\varepsilon)x)^2}(1-\varepsilon)^2\right).$$

$\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ が成立するとき,

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{\psi_1((1-\varepsilon)x)}{((1-\varepsilon)x)^2} \to \frac{1}{2} \qquad (x \to \infty)$$

となるので,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \ge \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(2-\varepsilon).$$

すると, $1 > \varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるので,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \ge 1$$

が成立する.

以上より, $\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ が成立するならば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

が成り立つ. □

定理 4.34 $x > 1$ において,

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n+1}}{2n(2n-1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}.$$

[略証] マンゴルトの公式 (定理 4.24) の証明と同様に積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \qquad (a > 1) \tag{4.15}$$

を 2 通りの方法で計算する.

まず, $\psi(x)$ は定義より階段状に増加していく関数なので,

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t) dt = \sum_{n \le x} \Lambda(n)(x-n).$$

このことと,

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

に注意すれば,

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{a-\sqrt{-1}\infty}^{a+\sqrt{-1}\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

を得る.

他方, 定理 4.24 の証明中の式

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\log \pi$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{s}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\
&= \frac{s+1}{2(s-1)} - \sum_{\rho} \frac{s+1}{(\rho+1)(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s+1}{(2n-1)(s+2n)} - \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}
\end{aligned}$$

がいえるので, これらを用いて積分 (4.15) を計算すると, 定理の式の右辺を得る. □

[素数定理 (定理 4.17) の証明概略] 命題 4.18, 命題 4.19, 補題 4.33 により, $\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ を示せば証明が終わる. 定理 4.34 により, $\psi_1(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ を示すには

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} \to 0 \qquad (x \to \infty)$$

をいえばよい.

ρ を $\zeta(s)$ の非自明な零点とすると, 定理 4.32 により $\mathrm{Re}(\rho) < 1$ なので, $x > 1$ のとき $|x^{\rho-1}| < 1$ で, さらに $\displaystyle\sum_{\rho} \frac{1}{\rho(\rho+1)}$ が絶対収束する[5]ので, $\displaystyle\sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}$ は $x > 1$ において絶対一様収束する. 従って,

$$\lim_{x\to\infty} \left| \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} \right| \leq \lim_{x\to\infty} \sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} \right| = \sum_{\rho} \lim_{x\to\infty} \left| \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} \right| = 0.$$

□

4.3.3 リーマンの明示公式

リーマンは 1859 年の論文で $\pi(x)$ を直接書き下す式 (リーマンの明示公式) を与えており, それが論文の主結果となっている. 最後にそれについて紹介しよう. まず

$$J(x) := \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \qquad (x \geq 0)$$

という関数を考える. ここで, n は 2 以上 x 以下の自然数をわたる. $0 < x < 2$ のときは $J(x) = 0$ とする.

$$\frac{\Lambda(n)}{\log n} = \begin{cases} \dfrac{1}{j} & (n = p^j,\ p \text{ は素数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

[5] これは定理 4.27 ($\xi(s)$ の無限積表示) の収束性の証明と共通の議論により示される.

で, $p^j \leq x \Leftrightarrow j \leq \log_p x \Leftrightarrow p \leq x^{\frac{1}{j}}$ なので,

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{p\leq x}\sum_{j=1}^{[\log_p x]}\frac{1}{j} \qquad (\text{この和を } j \text{ ごとにまとめなおす}) \\ &= \sum_{p\leq x}1+\frac{1}{2}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{2}}}1+\frac{1}{3}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}}1+\cdots \\ &= \pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

を得る. なお, 式の最後の部分は形式的には無限和として書いているが, $x^{\frac{1}{n}} < 2$ ($\Leftrightarrow \log_2 x < n$) のとき $\pi(x^{\frac{1}{n}}) = 0$ となるので, 実際には $n = 1$ から $n = [\log_2 x]$ までの有限和である. するとメビウスの反転公式 (次節 §4.4 を参照) により,

$$\pi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}}) \qquad (\mu(n)\ \text{はメビウス関数}) \tag{4.16}$$

を得る.

従って $J(x)$ を書き下すことができれば, 同時に $\pi(x)$ を書き下す公式が得られることになる. リーマンは対数積分を使って $J(x)$ を次のように書き下す公式を得た.

定理 4.35 (リーマンの明示公式) $x > 1$ のとき, x が素数べきでなければ[6],

$$J(x)=\mathrm{li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho})+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}-\log 2.$$

ここで, ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点全体をわたる (無限和は条件収束で, 足し合わせる順番は定理 4.24 と同じにとる). また, $\mathrm{li}(x)$ は

$$\mathrm{li}(x):=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\log t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\right)$$

で定義される対数積分[7]で, $\mathrm{Li}(x)$ とは $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$ の関係がある.

4.4 補足: メビウスの反転公式

関数 $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ を次で定義する.

[6] x が素数べきのときは, 左辺の $J(x)$ を $J(x)-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Lambda(x)}{\log x}$ に置き換えた式が成立する.

[7] 本当は $\mathrm{li}(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\log t}$ と書きたいが, $\dfrac{1}{\log t}$ が $t = 1$ で特異点をもつため, そこを避けている.

(i) $\mu(1) = 1$,

(ii) n が平方因数[8]をもつとき $\mu(n) = 0$,

(iii) n が相異なる k 個の素数の積のとき, $\mu(n) = (-1)^k$.

この μ を**メビウス関数**と呼ぶ.

関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ が, 任意の互いに素な自然数 m, n に対し $f(mn) = f(m)f(n)$ を満たすとき, **乗法的**であるという. 定義よりメビウス関数 μ は乗法的である.

定理 4.36 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ が乗法的ならば,

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \qquad (d \text{ は } n \text{ の約数全体をわたる})$$

で定義される $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ も乗法的である.

[証明] 任意の互いに素な自然数 m, n に対し, mn のすべての約数は, m の約数 d と n の約数 d' の積 dd' の形に重複なく表されるので,

$$\begin{aligned} g(mn) &= \sum_{d \mid m,\ d' \mid n} f(dd') = \sum_{d \mid m,\ d' \mid n} f(d)f(d') \\ &= \left(\sum_{d \mid m} f(d) \right) \left(\sum_{d' \mid n} f(d') \right) = g(m)g(n). \end{aligned}$$

□

定理 4.37

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1). \end{cases}$$

[証明] 左辺を $g(n)$ とおくと, 定理 4.36 より $g(n)$ は乗法的である. まず $g(1) = \mu(1) = 1$ は明らか. また, p が素数, $a \in \mathbb{N}$ のとき,

$$g(p^a) = \sum_{j=0}^{a} \mu(p^j) = \mu(1) + \mu(p) = 0$$

となる. よって, $n > 1$ のとき, $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ と素因数分解されたとすると,

$$g(n) = g(p_1^{a_1}) \cdots g(p_k^{a_k}) = 0.$$

□

ちなみに, この定理を使うと次のことがいえる.

[8] ある素数 p があって n が p^2 で割り切れるとき, n は平方因数をもつ, という.

系 4.38 $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{(mn)^s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\sum_{d\,|\,k}\mu(d) \qquad (\leftarrow k = mn,\ d = n \text{ とおいてまとめ直した}) \\
&= 1 \qquad (\leftarrow \text{定理 } 4.37).
\end{aligned}$$

□

前節の式 (4.16) は定理 4.37 を使って次のように示される.

[式 (4.16) の証明] $J(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\pi(x^{\frac{1}{m}})$ により,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\pi(x^{\frac{1}{mn}}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\pi(x^{\frac{1}{k}})\sum_{d\,|\,k}\mu(d) \qquad (\leftarrow k = mn,\ d = n \text{ とおいてまとめ直した}) \\
&= \pi(x) \qquad (\leftarrow \text{定理 } 4.37).
\end{aligned}$$

□

定理 4.37 を使って上記のような証明方法で示される各種の反転公式が「メビウスの反転公式」と呼ばれるが, 通常は次の定理を指すことが多い.

定理 4.39 関数 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ について,

$$g(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d) \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{d\,|\,n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

が成立する.

[証明] $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned}
\sum_{d\,|\,n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d\,|\,n}\mu(d)\sum_{c\,|\,\frac{n}{d}}f(c) = \sum_{cd\,|\,n}\mu(d)f(c) \\
&= \sum_{c\,|\,n}f(c)\sum_{d\,|\,\frac{n}{c}}\mu(d) = f(n).
\end{aligned}$$

(⇐)

$$\begin{aligned}
\sum_{d\,|\,n} f(d) &= \sum_{d\,|\,n}\sum_{c\,|\,d}\mu(c)g\left(\frac{d}{c}\right) \\
&= \sum_{cd'\,|\,n}\mu(c)g(d') \qquad (\leftarrow d' = d/c \text{ とおいてまとめ直した}) \\
&= \sum_{d'\,|\,n} g(d')\sum_{c\,|\,\frac{n}{d'}}\mu(c) = g(n).
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 足立恒雄, 杉浦光夫, 長岡亮介 編訳「リーマン論文集」朝倉書店.

[2] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信「ベルヌーイ数とゼータ関数」牧野書店.

[3] H.M. エドワーズ 著, 鈴木治郎 訳「明解　ゼータ関数とリーマン予想」講談社.

[4] 小松勇作「特殊函数」近代数学講座 9, 朝倉書店.

[5] G.H. ハーディ, E.M. ライト 著, 示野信一, 矢神毅 訳「数論入門 I, II」シュプリンガー・フェアラーク東京.