１～３章演習問題解答例

演習 1.3 ベルヌーイ数 $B_0, B_1, B_2, \ldots$ の最初のいくつかの項を, 漸化式を使って計算せよ.

[解答例] まず $k = 0$ として $B_0 = 1$. $k = 1$ のときは

$$B_0 + 2B_1 = 2$$

より

$$B_1 = \frac{1}{2}(2 - B_0) = \frac{1}{2}.$$

$k = 2$ のとき,

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 3$$

より

$$B_2 = \frac{1}{3}(3 - B_0 - 3B_1) = \frac{1}{6}.$$

$k = 3$ のとき,

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 4$$

より

$$B_3 = \frac{1}{4}(4 - B_0 - 4B_1 - 6B_2) = 0.$$

$k = 4$ のとき,

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 5$$

より

$$B_4 = \frac{1}{5}(5 - B_0 - 5B_1 - 10B_2 - 10B_3) = -\frac{1}{30}.$$

等々. □

演習 1.10 ベルヌーイ多項式 $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \ldots$ の最初のいくつかを具体的に計算せよ.

[解答例] まず $B_0(x)=1$. あとは系 1.9 (1) の両辺の不定積分と定理 1.8 (1) (a) を使って求めていくのが一番やりやすいかもしれない.

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= x - B_1 = x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) - B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= 4\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) + B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

演習 1.11 ベルヌーイ多項式を使ったべき乗和の公式

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

が成立することを示せ.

[解答例] 定理 1.8 (b) の k を $k+1$ にした式

$$B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k$$

で $x = 1, \ldots, n$ とおいたものを全て足し合わせれば,

$$B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) = (k+1)\sum_{i=1}^{n} i^k$$

となる. あとは定理 1.8 (a) より $B_{k+1}(1) = B_{k+1}$ だから, 与式を得る. □

演習 1.12 関数 $y = B_k(x)$ のグラフについて, 次を示せ.
(1) k が偶数のとき, $y = B_k(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して対称である.
(2) k が奇数のとき, $y = B_k(x)$ のグラフは点 $(\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称である.

[解答例] (1) 直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して点 (a,b) と対称な点は $(1-a, b)$ である. k が偶数のとき, 系 1.9 (2) により $B_k(1-x) = B_k(x)$ だから,

$$\begin{aligned}
(a,b) \text{ が } y = B_k(x) \text{ 上の点} &\Leftrightarrow b = B_k(a) = B_k(1-a) \\
&\Leftrightarrow (1-a, b) \text{ が } y = B_k(x) \text{ 上の点}.
\end{aligned}$$

よって $y = B_k(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して対称である.

(2) 点 $(\frac{1}{2}, 0)$ に関して点 (a, b) と対称な点は $(1-a, -b)$ である. k が奇数のとき, 系 1.9 (2) により $B_k(1-x) = -B_k(x)$ だから,

$$\begin{aligned}(a, b) \text{ が } y = B_k(x) \text{ 上の点} \quad &\Leftrightarrow \quad b = B_k(a) = -B_k(1-a) \\ &\Leftrightarrow \quad -b = B_k(1-a) = -B_k(a) \\ &\Leftrightarrow \quad (1-a, -b) \text{ が } y = B_k(x) \text{ 上の点.}\end{aligned}$$

よって $y = B_k(x)$ のグラフは点 $(\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称である. □

演習 2.7 $f(x)$ がある区間で 2 階微分可能な関数ならば, その区間内で $f(x)$ が凸であることと, 常に $f''(x) \geq 0$ となることは同値であることを証明せよ.

[解答例] 考えている区間を I とおく.

($\Rightarrow$) I で $f(x)$ が凸であるとする. すると任意の $x_1, x_2 \in I$ s.t. $x_1 < x_2$ に対し, $x_1 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < x_2$ なる $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ をとると

$$\frac{f(\widetilde{x}_1) - f(x_1)}{\widetilde{x}_1 - x_1} \leq \frac{f(\widetilde{x}_2) - f(x_1)}{\widetilde{x}_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(\widetilde{x}_2)}{x_1 - \widetilde{x}_2} \leq \frac{f(x_2) - f(\widetilde{x}_2)}{x_2 - \widetilde{x}_2}.$$

ここで $\widetilde{x}_1 \to x_1$, $\widetilde{x}_2 \to x_2$ とすると,

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

を得る. 従って,

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

ここで $x_2 \to x_1$ または $x_1 \to x_2$ とすることで $f''(x_1) \geq 0$, $f''(x_2) \geq 0$ を得る. x_1, x_2 は $x_1 < x_2$ なる任意の I の元だから, 任意の $x \in I$ について $f''(x) \geq 0$ となることが言える.

($\Leftarrow$) 任意の $x \in I$ に対し $f''(x) \geq 0$ となるとする. このとき $f'(x)$ は I において (広義) 単調増加である. I 内の任意の異なる 3 点 x_1, x_2, x_3 に対し, $x_1 < x_2$ ならば,

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

となることを, 3 つの場合に分けて示す.

(1) $x_1 < x_3 < x_2$ の場合. 平均値の定理により, ある $x_1 < \widetilde{x}_1 < x_3 < \widetilde{x}_2 < x_2$ が存在して,

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} = f'(\widetilde{x}_1) \leq f'(\widetilde{x}_2) = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

(2) $x_3 < x_1 < x_2$ の場合. (1) より,

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

よって,

$$0 \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} = \frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)}.$$

この両辺に $(x_2-x_1)/(x_2-x_3)$ (>0) をかければ,

$$0 \leq \frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)}{(x_2-x_3)(x_1-x_3)} = \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} - \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}$$

を得る.

(3) $x_1 < x_2 < x_3$ の場合. (1) より,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

よって,

$$0 \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)}.$$

この両辺に $(x_2-x_1)/(x_3-x_1)$ (>0) をかければ,

$$0 \leq \frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

を得る. □

演習 2.11 定義 2.3 の広義積分 (第二種オイラー積分) において, 変数を変換することにより, $\Gamma(x)$ の別の積分表示が得られる.

(1) $\tau = e^{-t}$ とおくことにより,

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^{x-1} d\tau \quad (x>0)$$

となることを確かめよ.

(2) $\tau = t^x$ とおくことにより,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau^{\frac{1}{x}}}\, d\tau \quad (x>0)$$

となることを確かめよ.

[解答例] (1) $\tau = e^{-t}$ のとき, $t = -\log\tau = \log\dfrac{1}{\tau}$ で, $dt = -\dfrac{1}{\tau}d\tau$. また, t が 0 から ∞ までわたるとき, τ は 1 から 0 までわたるので, $x > 0$ において

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_1^0 \tau\left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{x-1}\left(-\frac{1}{\tau}\right)d\tau \\ &= \int_0^1 \left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{x-1} d\tau.\end{aligned}$$

(2) $x > 0$ のとき, $\tau = t^x$ とすると $t = \tau^{\frac{1}{x}}$ で, $dt = \dfrac{1}{x}\tau^{\frac{1}{x}-1}d\tau$. また, t が 0 から ∞ までわたるとき, τ も 0 から ∞ までわたるので,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^\infty e^{-\tau^{\frac{1}{x}}}\tau^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x}\tau^{\frac{1}{x}-1}\right)d\tau \\ &= \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau^{\frac{1}{x}}}d\tau.\end{aligned}$$

□

演習 2.19 m, n を自然数とするとき, 次の式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

[解答例] $\tau = t^n$ とすると, $d\tau = nt^{n-1}dt$ で, τ が 0 から 1 までわたるとき, t も 0 から 1 までわたるので, $x > 0$, $y > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}B(x,y) &= \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau = \int_0^1 t^{nx-n}(1-t^n)^{y-1}(nt^{n-1})dt \\ &= n\int_0^1 t^{nx-1}(1-t^n)^{y-1}dt.\end{aligned}$$

そこで, $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{1}{2}$ を代入すると,

$$B\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2}\right) = n\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt.$$

よって,

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

□

演習 2.25 $0 < x < 1$ において, 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{1+\tau}d\tau = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

(3) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2x-1}d\theta = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

[解答例] (1)

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+(1-x))} = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

(2) $\tau = \dfrac{t}{1-t}$ とおくと, $t = \dfrac{\tau}{1+\tau}$ で, $dt = \dfrac{1}{(1+\tau)^2}d\tau$. また, t が 0 から 1 までわたるとき, τ は 0 から ∞ までわたるので,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi x} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^{-x}\frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{1+\tau}d\tau.\end{aligned}$$

(3) 2.4 節で得られたベータ関数の公式

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta$$

により,

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = B(x, 1-x) = B(1-x, x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-2x}\theta \sin^{2x-1}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2x-1}d\theta.$$

□

演習 3.1 $\bar{z} = x - \sqrt{-1}\,y$ を z の**共役複素数**という. 次を示せ.

(1) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$,

(2) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\bar{z})$.

[解答例] (1) $z\bar{z} = (x+\sqrt{-1}\,y)(x-\sqrt{-1}y) = x^2+y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

(2) $z+\bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$, $z-\bar{z} = 2\sqrt{-1}\,y = 2\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\, z$ による. □

演習 3.2 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 次を示せ.

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

(2) 2π の整数倍の差を除き $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

(3) $z_2 \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

(4) $z_2 \neq 0$ のとき, 2π の整数倍の差を除き $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

[解答例] $z_1 = x_1 + \sqrt{-1}\,y_1$, $z_2 = x_2 + \sqrt{-1}\,y_2$, $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$ とおく.

(1) $z_1 z_2 = (x_1 + \sqrt{-1}\,y_1)(x_2 + \sqrt{-1}\,y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \sqrt{-1}(x_1y_2 + y_1x_2)$ だから,

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}.$$

一方,

$$|z_1||z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}.$$

よって $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(2) $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)$ と (1) より,

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2) \\
&= |z_1 z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \sqrt{-1}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2)).
\end{aligned}$$

これは $z_1 z_2$ の偏角が 2π の整数倍の差を除き $\theta_1 + \theta_2$ と一致することを意味している.

(3) (1) より,

$$|z_2|\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|.$$

よって,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)} = \frac{\cos\theta_2 - \sqrt{-1}\sin\theta_2}{|z_2|(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - \sqrt{-1}\sin\theta_2)} \\
&= \frac{1}{|z_2|}\frac{\cos(-\theta_2) + \sqrt{-1}\sin(-\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \left|\frac{1}{z_2}\right|(\cos(-\theta_2) + \sqrt{-1}\sin(-\theta_2)).
\end{aligned}$$

これは, $1/z_2$ の偏角が 2π の整数倍の差を除き $-\theta_2$ と一致することを意味している. あとは (2) による. □

演習 3.13 次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\,z^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^n\frac{n\pi}{3}\right)z^n$

[解答例] (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=1.$$

よって, ダランベールの公式により, 収束半径は 1 である.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

よって, ダランベールの公式により, 収束半径は 0 である.

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

よって, ダランベールの定理により, 収束半径は e である.

(4)

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sin^n\frac{n\pi}{3}\right|}=\limsup_{n\to\infty}\left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって, コーシー・アダマールの公式により, 収束半径は $2/\sqrt{3}$ である. □

演習 3.14 べき級数が収束円の周上のある 1 点で絶対収束するならば, 周上の他のどの点でも絶対収束する. このことを証明せよ.

[解答例] べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ の収束半径を r とし, このべき級数が収束円の周上のある点 z_0 で絶対収束するとする. このとき $|z_0-a|=r$ に注意して,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z_0-a)^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z_0-a|^n=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

とおく. z を収束円の周上の任意の点とすると, $|z-a|=r$ だから,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-a)^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n=S$$

となり, z においても絶対収束することがいえる. □

演習 3.17 (1) 双曲線関数の加法定理

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

を示せ.

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ を示せ.

(3) 導関数 $\dfrac{d}{dz}\cosh z$, $\dfrac{d}{dz}\sinh z$ を求めよ.

[解答例] (1)

$$\begin{aligned}
&\cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \\
= \;& \frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2} \\
= \;& \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}+e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}+e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}-e^{z_1-z_2}-e^{-z_1+z_2}}{4} \\
= \;& \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \cosh(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \\
= \;& \frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2} \\
= \;& \frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}+e^{z_1-z_2}-e^{-z_1+z_2}+e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}-e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}}{4} \\
= \;& \frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \frac{(e^z+e^{-z})^2}{4} - \frac{(e^z-e^{-z})^2}{4} \\
&= \frac{e^{2z}+e^{-2z}+2-(e^{2z}+e^{-2z}-2)}{4} = 1.
\end{aligned}$$

(3) ここではべき級数展開を項別微分して求めることにする.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\cosh z &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m-1}}{(2m-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sinh z, \\
\frac{d}{dz}\sinh z &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}}{(2m)!} = \cosh z.
\end{aligned}$$

別のやり方としては, 定義式の $(e^z+e^{-z})/2$ などの導関数を直接求めてもよい (そのほうが簡単かもしれない). □

演習 3.18 e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ をそれぞれ定理 3.6 の形で表し, さらにコーシー・リーマンの微分方程式 (3.1) を満たしていることを示せ.

[解答例] $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ とする ($z = x + \sqrt{-1}\, y$).

e^z を実部と虚部に分解すると,

$$e^z = e^x e^{\sqrt{-1}\, y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = e^x \cos y + \sqrt{-1}\, e^x \sin y$$

となるので, $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ である. コーシー・リーマンの微分方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

だから, 確かに満たしている.

次に, $\cos z$ を実部と虚部に分解すると,

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-1}\, z} + e^{-\sqrt{-1}\, z}) = \frac{1}{2}(e^{-y+\sqrt{-1}\, x} + e^{y-\sqrt{-1}\, x}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-y} \cos x + \sqrt{-1}\, e^{-y} \sin x + e^y \cos(-x) + \sqrt{-1}\, e^y \sin(-x)) \\
&= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - \sqrt{-1} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \\
&= \cosh y \cos x - \sqrt{-1} \sinh y \sin x
\end{aligned}$$

となるので, $u(x, y) = \cosh y \cos x$, $v(x, y) = -\sinh y \sin x$ である. コーシー・リーマンの微分方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\cosh y \sin x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sinh y \cos x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

だから, 確かに満たしている.

次に, $\sin z$ を実部と虚部に分解すると,

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\sqrt{-1}\, z} - e^{-\sqrt{-1}\, z}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-y+\sqrt{-1}\, x} - e^{y-\sqrt{-1}\, x}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-y} \cos x + \sqrt{-1}\, e^{-y} \sin x - e^y \cos(-x) - \sqrt{-1}\, e^y \sin(-x)) \\
&= -\frac{e^y - e^{-y}}{2\sqrt{-1}} \cos x + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \\
&= \cosh y \sin x + \sqrt{-1} \sinh y \cos x
\end{aligned}$$

となるので, $u(x, y) = \cosh y \sin x$, $v(x, y) = \sinh y \cos x$ である. コーシー・リーマンの微分方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh y \cos x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sinh y \sin x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

だから, 確かに満たしている.

次に, $\cosh z$ を実部と虚部に分解すると, 演習 3.17 (1) より,

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh(x+\sqrt{-1}y) = \cosh x \cosh \sqrt{-1}\, y + \sinh x \sinh \sqrt{-1}\, y \\ &= \cosh x \cos y + \sqrt{-1} \sinh x \sin y\end{aligned}$$

となるので, $u(x,y) = \cosh x \cos y$, $v(x,y) = \sinh x \sin y$ である. コーシー・リーマンの微分方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

だから, 確かに満たしている.

最後に, $\sinh z$ を実部と虚部に分解すると, 演習 3.17 (1) より,

$$\begin{aligned}\sinh z &= \sinh(x+\sqrt{-1}y) = \sinh x \cosh \sqrt{-1}\, y + \cosh x \sinh \sqrt{-1}\, y \\ &= \sinh x \cos y + \sqrt{-1} \cosh x \sin y\end{aligned}$$

となるので, $u(x,y) = \sinh x \cos y$, $v(x,y) = \cosh x \sin y$ である. コーシー・リーマンの微分方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sinh x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

だから, 確かに満たしている. □