2　ガンマ関数

2.1　ガンマ関数の定義

2.1.1　定義その 1 : 階乗の拡張として

ガンマ関数には互いに同値ないくつかの定義が知られているが, 歴史的には, 18 世紀の数学者オイラーにより, 階乗 $(x-1)! = (x-1)(x-2)\cdots 1$ を x が自然数とは限らない場合へ拡張するという観点からはじめて定義された.

n を任意の自然数とする. 自然数 x に対し, $(n+x)!$ を 2 通りの方法で計算して,

$$\begin{aligned}&(x-1)!x(x+1)\cdots(x+n) = (n+x)!\\ &= n!(n+1)\cdots(n+x) = n!n^x\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}.\end{aligned}$$

よって,

$$(x-1)! = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}.$$

この式の両辺は n によらないので, $n\to\infty$ としても変わらない. また,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\} = 1$$

だから,

$$(x-1)! = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

を得る. ここで, 右辺の式は x が自然数でなくても意味をもつ.

定義 2.1 0 と負の整数を除く実数 x に対して, 極限

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

は収束し, x の関数となる. これを**ガンマ関数**と呼ぶ.

ただし, x が自然数でない場合も極限がちゃんと収束するかどうかがまだ明らかでない. ここでは上の定義はいったん忘れて別の方法でガンマ関数を定義し, あとで改めて両者が一致することを (収束性も含めて) 示すことにしよう (系 2.10).

2.1.2　定義その２：第二種オイラー積分

オイラーはガンマ関数の積分による表示も与えており, それは第二種オイラー積分[1]と呼ばれている (第二種というからには第一種もあるわけだが, それについては後述).

まず, 階乗には次のような積分表示がある.

命題 2.2

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

[証明] 左辺を I_n とおく. $n \geq 1$ のとき, 部分積分法により,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty e^{-t}t^n dt = \int_0^\infty (-e^{-t})' t^n dt = [-e^{-t}t^n]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t})(t^n)' dt \\ &= 0 + n\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt = nI_{n-1}. \end{aligned}$$

これを繰り返せば,

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0$$

を得る. 一方,

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

以上より, 求める式を得る. □

上の命題の左辺は n が自然数とは限らない場合でも (積分が収束すれば) 意味をもつ. そこで, ガンマ関数の定義を改めて次のように与える.

定義 2.3 広義積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

は $x > 0$ のとき収束し, x の関数となる. これを**ガンマ関数**と呼ぶ.

[収束性の証明] 積分範囲を 0 から 1 までと 1 から ∞ までに分けて, それぞれについて収束性を示す.

(0 から 1 まで) $t > 0$ ならば $e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt < \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

[1]「オイラー積分」というネーミングは 18〜19 世紀の数学者ルジャンドルによる

ε を 0 に近づけると左辺の積分の値は単調増加するが, 上から $1/x$ で抑えられるので, ある値に収束する. すなわち, 任意の $x>0$ に対して広義積分

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt$$

は収束する.

(1 から ∞ まで) $t>0$ のとき, 任意の自然数 n に対して $e^t=\sum_{i=0}^\infty t^i/i! > t^n/n!$ だから, $e^{-t}<n!/t^n$ である. よって $0<e^{-t}t^{x-1}<n!/t^{n-x+1}$ を得る. 故に $n>x+1$ となるように自然数 n を選べば, 任意の $\delta>1$ に対し

$$\int_1^\delta e^{-t}t^{x-1}dt < \int_1^\delta \frac{n!}{t^{n-x+1}}dt = \left[-\frac{n!}{(n-x)t^{n-x}}\right]_1^\delta = \frac{n!}{n-x}-\frac{n!}{(n-x)\delta^{n-x}} < \frac{n!}{n-x}.$$

δ が増大するとき左辺の積分の値は単調増加するが, 上から $n!/(n-x)$ で抑えられるので, ある値に収束する. すなわち, 任意の $x>0$ に対して広義積分

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{\delta\to\infty}\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

は収束する. □

ガンマ関数のとても重要な性質として, 次に述べる差分方程式 (漸化式) を満たすというものがある.

定理 2.4 $\Gamma(x)$ は, 差分方程式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{2.1}$$

を満たす.

[証明] 部分積分法により,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty(-e^{-t})'t^x dt = [(-e^{-t})t^x]_0^\infty - \int_0^\infty(-e^{-t})(t^x)'dt \\ &= x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

これは $n!=n(n-1)!$ という式の一般化となっている. そこで, $0<x\le 1$ における $\Gamma(x)$ の値が分かっていれば, この式を使って $1<x\le 2$ における値も簡単に計算できる. そしてさらに次の長さ 1 の区間, その次, 等々についても同様に計算していくことができる. 任意の自然数 n に対し, 式 (2.1) を繰り返し用いれば,

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)\Gamma(x+n-1)=\cdots=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$$

を得る．このことを使って $\Gamma(x)$ の定義域を負の実数にまで拡張していくことができる．x が $-n < x < -n+1$ という区間にあるとき, $\Gamma(x)$ の値を

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

により定義する．これで, 0 と負の整数を除くすべての実数 x に対して $\Gamma(x)$ を定めることができた．また, このように拡張した定義域においても式 (2.1) は常に成立する．

2.2 対数的凸性と差分方程式によるガンマ関数の特徴づけ

差分方程式 (2.1) はガンマ関数を含め階乗を拡張した関数ならば満たすべき重要な性質であるが, これだけでガンマ関数が特徴づけられるわけではない．例えば $\Gamma(x)$ の代わりに, 周期関数をかけた $\cos(2\pi x)\Gamma(x)$ を考えると, これはやはり同じ差分方程式を満たすし, 自然数に対しては階乗と一致する．

実は, $\Gamma(x)$ のもう一つの注目すべき性質に, 対数的凸性というものがある．ここでいう凸性というのは「下に凸」のことで, 次のように定義される．

定義 2.5 $f(x)$ をある区間 I で定義された関数とする．

(1) $f(x)$ が区間 I において **凸 (convex)** であるとは, I 内の任意の異なる 3 点 x_1, x_2, x_3 に対し, $x_1 < x_2$ であれば常に

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

が成り立つことをいう．ひらたく言えば, 考えている区間において平均変化率が (広義の) 単調増加するような関数を凸であるという．

(2) $f(x)$ が区間 I において**対数的凸 (log convex)** であるとは, I において常に $f(x) > 0$ であり, かつ, $\log f(x)$ が凸であることをいう．

次の命題を見れば, よりはっきりと「下に凸」のことだと分かる．

命題 2.6 $f(x)$ がある区間で 2 階微分可能な関数ならば, その区間内で $f(x)$ が凸であることと, 常に $f''(x) \geq 0$ となることは同値である．

演習 2.7 上の命題を証明せよ．

さて, ガンマ関数に話を戻すと, 定義 2.3 の被積分関数 $e^{-t}t^{x-1}$ は $t > 0$, $x > 0$ ならば常に正なので, $x > 0$ のとき $\Gamma(x) > 0$ である．さらに, この範囲で $\Gamma(x)$ が対数的凸であることがいえる．

命題 2.8 $\Gamma(x)$ は $x > 0$ において対数的凸である．

[略証] 参考文献 [1] (アルチンによる解説) では, まず一般の凸関数について詳しく調べ, それを巧妙に使って示している.

もう一つのやり方としては, 定義 2.3 の広義積分が一様収束し, さらに微分と積分の順序交換ができることを示した上で, $t^x = e^{x\log t}$ より $\Gamma(x)$ の n 階導関数が

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n\,dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられることをいう. その上で $\log\Gamma(x)$ に命題 2.6 を適用する:

$$\begin{aligned}
\{\log\Gamma(x)\}'' &= \left\{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right\}' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(x)}\left\{\Gamma''(x) - 2\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\Gamma'(x) + \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2\Gamma(x)\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\left\{(\log t)^2 - 2\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\log t + \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2\right\}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\left(\log t - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2 dt \geq 0.
\end{aligned}$$

□

ガンマ関数はこの対数的凸性と差分方程式 (2.1) によって特徴づけられる.

定理 2.9 (ボーア・モレルップの定理) 関数 $f(x)$ が以下の (1)(2)(3) をすべて満たすならば, その定義域において $f(x)$ はガンマ関数と一致する.

(1) $f(x+1) = xf(x)$.

(2) $f(x)$ の定義域は $x > 0$ を含んでおり, そこでは対数的凸である.

(3) $f(1) = 1$.

[証明] $f(x)$ を (1)(2)(3) をすべて満たす関数とする. まず (1) により, $0 < x \leq 1$ と任意の自然数 n に対し,

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x). \tag{2.2}$$

この式で $x = 1$ とおけば, (3) より, $f(n+1) = n!$ がわかる. 言い直せば, 任意の自然数 n に対し $f(n) = (n-1)!$ となる.

さて, 証明は $f(x)$ が区間 $0 < x \leq 1$ において $\Gamma(x)$ と一致することを示せば十分である. それだけいえれば後は (1) から, すべてのところで $f(x)$ が $\Gamma(x)$ と一致することがいえる. いま, x を $0 < x \leq 1$ なる任意の実数, n を 2 以上の任意の自然数とする. (2) より $f(x)$ は対数的凸だから, 次の不等式

$$\frac{\log f(-1+n) - \log f(n)}{(-1+n) - n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leq \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{(1+n) - n}$$

が成立する．ここで, $f(n+1)=n!$, $f(n)=(n-1)!$, $f(n-1)=(n-2)!$ より, 上の不等式の各辺を書き直せば,

$$\log(n-1) \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n$$

となる．さらに各辺に x をかけ, $\log(n-1)!$ を移行すれば,

$$\log\{(n-1)^x(n-1)!\} \leq \log f(x+n) \leq \log\{n^x(n-1)!\}$$

を得る．すると, 対数関数は単調増加だから,

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!$$

である．ここで式 (2.2) を用いれば,

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}$$

を得る．これは 2 以上の任意の自然数に対して成立するのであるから, 左側の不等式において n を $n+1$ に置き換えてももちろん成立する:

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}.$$

これにより

$$f(x)\frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x)$$

が分かる．ここで $n \to \infty$ とすると, 不等式の左右は同じ値 $f(x)$ に収束するので, 真ん中も収束して

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

を得る．一方, $\Gamma(x)$ も条件 (1)(2)(3) を満たすのであったから, 当然この式の左辺を $\Gamma(x)$ に置き換えた式も成立するはずである．従って $f(x)=\Gamma(x)$ がいえて, 証明ができた． □

系 2.10 0 と負の整数を除く任意の実数 x に対し, 定義 2.1 の右辺の極限は収束し, 2.1.2 節で定義した $\Gamma(x)$ と一致する:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{2.3}$$

[証明] 定理 2.9 の証明で $0 < x \leq 1$ なる範囲では成立することが示されている. 一般にも成立することを示すため,

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

と書くことにする. このとき容易に分かるように, 次が成立する:

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1}, \quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\frac{x+n+1}{n}\Gamma_n(x+1).$$

このひとつめの式により, もし $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ が存在するなら $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$ も存在するということが分かる. また, ふたつめの式により, もし $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$ が存在して $x \neq 0$ なら, $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ も存在するということが分かる. $0 < x \leq 1$ なる範囲では $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ が存在することは既に示されているので, 以上より, 0 と負の整数を除くすべての実数 x に対して (2.3) の極限が収束することがいえた.

そこで, (2.3) の極限を $f(x)$ と書くことにすると, 上記のひとつめの式により $f(x+1) = xf(x)$ が成立することが分かる. しかも, $f(x)$ は少なくとも $0 < x \leq 1$ の範囲では $\Gamma(x)$ と等しいのであるから, 結局すべての場所で $\Gamma(x)$ と等しいことがいえる. □

演習 2.11 定義 2.3 の広義積分 (第二種オイラー積分) において, 変数を変換することにより, $\Gamma(x)$ の別の積分表示が得られる.

(1) $\tau = e^{-t}$ とおくことにより,

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{x-1} d\tau \quad (x > 0)$$

となることを確かめよ.

(2) $\tau = t^x$ とおくことにより,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau^{\frac{1}{x}}}\, d\tau \quad (x > 0)$$

となることを確かめよ.

2.3 オイラー定数とガンマ関数の無限積表示

上の系 2.10 の証明中に使った $\Gamma_n(x)$ を少し変形すると,

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= e^{x\log n}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{2+x}\cdots\frac{n}{n+x}\\ &= e^{x\left(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x}{1+x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}\end{aligned}$$

となるが, ここで e の右肩にのっている部分について, 次が成り立つ.

命題 2.12 極限

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

は収束し, ある定数となる. これは**オイラー定数**と呼ばれる.

[証明] $\log x$ の導関数 $1/x$ が $x>0$ において (狭義の) 単調減少であることと平均値の定理により,

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1)-\log n < \frac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

が成り立つ.

$$C_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n, \quad D_n = C_n - \frac{1}{n}$$

とおくと,

$$C_{n+1}-C_n = \frac{1}{n+1}-(\log(n+1)-\log n) < 0 \quad (n=1,2,3,\dots)$$

および,

$$D_{n+1}-D_n = C_{n+1}-C_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n} = \frac{1}{n}-(\log(n+1)-\log n) > 0 \quad (n=1,2,3,\dots)$$

となるので, 数列 $\{C_n\}$ は単調減少で, $\{D_n\}$ は単調増加である. しかも常に $D_n < C_n$ だから, $n\to\infty$ のとき C_n はある極限値に収束する. □

注意 2.13 実際に値を計算してみると

$$C = 0.5772...$$

となるが, 実はこれが無理数なのか有理数なのかはまだ分かっていない. 予想としては, 無理数, しかも超越数なのではないかと言われているが, 未解決問題となっている.

なお, ここではオイラー定数を C と書いているが, 小文字のガンマ (γ) で表すことも多い.

定理 2.14 (ワイエルシュトラスによる無限積表示)

$$\Gamma(x) = e^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

また, 逆数をとれば,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

この右辺は任意の実数 x に対して意味をもつので, これにより $1/\Gamma(x)$ はすべての実数に定義域をもつ関数として再定義される.

[証明] 本節の冒頭の計算と命題 2.12 による (無限積が収束することも含めて). □

2.4 第一種オイラー積分 (ベータ関数)

定義 2.15 任意の $x > 0$, $y > 0$ に対し, 積分

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

は収束し, x, y に関する (2 変数) 関数となる. これを第一種オイラー積分, またはベータ関数と呼ぶ.

[収束性の証明] $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ のときは明らかに収束するが, そうでないときはあまり明らかでない. 積分範囲を 0 から 1/2 までと, 1/2 から 1 までに分けて, それぞれについて収束性を示そう.

(0 から 1/2 まで) $0 < t < 1/2$ のとき, $1/2 < 1-t < 1$ だから,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} < t^{x-1}(1-t)^{-1} < 2t^{x-1}.$$

よって, 任意の $1/2 > \varepsilon > 0$ に対し,

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} 2t^{x-1}dt = \left[\frac{2t^x}{x}\right]_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{x}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \varepsilon^x\right\} < \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{2}{x}.$$

ε を 0 に近づけていくと左辺の積分は単調増加するが, 上から $2/x$ で抑えられるので, $\varepsilon \to 0$ のときある値に収束する.

(1/2 から 1 まで) t と $1-t$, x と y を入れ替えて上と同じことをすると, 任意の $1/2 > \delta > 0$ に対し,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < \frac{2}{y}$$

となることがいえる. 上と同様に, δ を 0 に近づけていくと左辺の積分は単調増加するが, 上から $2/y$ で抑えられるので, $\delta \to 0$ のときある値に収束する. □

定理 2.16 任意の $x > 0$, $y > 0$ に対し,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

が成り立つ. 特に, 右辺は 0 や負の整数を除くすべての実数 x, y で意味をもつので, その範囲まで $B(x,y)$ の定義域を拡張することができる.

[証明] 置換積分により,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt \qquad (s=u^2,\ t=v^2)\\
&= \int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-2}2u\,du\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2y-2}2v\,dv\\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv \qquad (u=\sqrt{\rho}\cos\theta,\ v=\sqrt{\rho}\sin\theta)\\
&= 2\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{x+y-1}d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta \qquad (w=\cos^2\theta)\\
&= -\Gamma(x+y)\int_1^0 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw=\Gamma(x+y)\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw\\
&= \Gamma(x+y)B(x,y).
\end{aligned}$$

□

この証明中の途中式より, $B(x,y)$ の別の積分表示も得られている:

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta.$$

定理 2.16 と上記の関係式を使って, ガンマ関数の 1/2 での値を計算することができる.

系 2.17

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

[証明]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)}=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi.$$

両辺の平方根をとって, 求める式を得る. □

注意 2.18 演習 2.11 (2) で $x=1/2$ とおくと,

$$\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る. さらに, $e^{-\tau^2}$ は偶関数なので,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\sqrt{\pi} \tag{2.4}$$

という興味深い結果を得る. 例えば上の式で $\tau=t/\sqrt{2}$ とすることで,

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$$

を得るが, この事実は統計学では基本的である (→ 標準正規分布).

ちなみに, 式 (2.4) 自体は置換積分で直接示すこともできる:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv \qquad (u=\sqrt{\rho}\cos\theta,\ v=\sqrt{\rho}\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\rho} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi.\end{aligned}$$

だから, 逆にそれを使えば, 定理 2.16 を使わずに系 2.17 を導くこともできる.

演習 2.19 m, n を自然数とするとき, 次の式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

2.5 ルジャンドルの公式・ガウスの乗法公式

定理 2.20 (ルジャンドルの公式) 次の式が成立する.

(1) $\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$,

(2) $\Gamma(2x) = \dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

[証明] (2) は (1) で x を $2x$ に置き換えれば得られるので, (1) だけ示せばよい.

$$f(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

とおく. これが定理 2.9 の (1)(2)(3) を満たすことを示す.

まず,

$$f(x+1) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\underbrace{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)} = xf(x)$$

より, $f(x)$ は定理 2.9 (1) の差分方程式を満たす. また, $x>0$ において $f(x)>0$ で,

$$\log f(x) = (x-1)\log 2 - \log\sqrt{\pi} + \log\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \log\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

より,

$$\{\log f(x)\}'' = \left\{\log\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right\}'' + \left\{\log\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\}'' \geq 0$$

となる. よって, $f(x)$ は $x>0$ において対数的凸である. さらに, 系 2.17 により,

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)=1.$$

以上より, $f(x)$ は定理 2.9 の (1)(2)(3) を満たし, $f(x)=\Gamma(x)$ を得る. □

定理 2.20 を一般化した次も知られている.

定理 2.21 (ガウスの乗法公式) 任意の自然数 n に対し, 次の式が成立する.

(1) $\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)=\frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{n^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x)$,

(2) $\Gamma(nx)=\frac{n^{nx-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$.

この定理の証明は定理 2.20 とおおむね同様にできるが, $x=1$ での値の決定 (定理 2.9 (3) の部分) が少し難しいので, 後で行うことにする (2.7.1 節).

2.6 $\sin x$ との関係

定理 2.22 (オイラーの反転公式) 次の式が成立する.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

[証明] $\varphi(x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$ とおき, これが定数関数でさらに値が π となることを示す. まず, $\Gamma(x)$ の定義域から, $\varphi(x)$ は少なくとも x が非整数のところでは定義される. その範囲において,

$$\varphi(x+1)=\Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(\pi x+\pi)=x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-x}(-\sin\pi x)=\varphi(x)$$

となるので, $\varphi(x)$ は周期関数である. さらに,

$$\varphi(x)=\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\frac{\sin\pi x}{x}=\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\left(\pi-\frac{\pi^3x^2}{3!}+\frac{\pi^5x^4}{5!}-\cdots\right)$$

と書けるが, この右辺は $x=0$ に対しても意味をもち, そこにおいても無限回微分可能な関数を表している. だから, $\varphi(x)$ の定義を $x=0$ にまで拡張して $\varphi(0)=\pi$ としても良い. さらに $\varphi(x)$ は周期関数なので, 任意の整数に対しても $\varphi(x)$ の値を π にとることで, 結局 $\varphi(x)$ は実数全体で定義され, さらに無限回微分可能な関数となる. また, 最初の定義式から $0<x<1$ において $\varphi(x)>0$ なので, 周期性と上記で述べたことから, すべての実数 x に対して $\varphi(x)>0$ である.

さて, 定理 2.20 (1) で x を $1-x$ に置き換えると,

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^x\Gamma(1-x)$$

となるので,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\\ &= \pi\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x\\ &= \pi\varphi(x)\end{aligned}$$

を得る. ここで $g(x)=\{\log\varphi(x)\}''$ とおくと, 上の式の両辺の対数をとってから 2 階導関数をとることにより,

$$\frac{1}{4}\left\{g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\}=g(x) \tag{2.5}$$

となる. $g(x)$ は $0\leq x\leq 1$ において連続なので, この区間で最大値・最小値をもつ. その最大値・最小値の絶対値をとり, 両者が等しいならその値, 異なるなら大きい方, を M とする. すると $g(x)$ は周期関数なので, 結局すべての x に対して $|g(x)|\leq M$ が成り立つ. 一方 (2.5) により, すべての x に対して

$$|g(x)|\leq\frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\leq\frac{M}{4}+\frac{M}{4}=\frac{M}{2}$$

が成り立つ. M のとり方がこれと矛盾しないためには, $M=0$ であるほかはない. すなわち $g(x)=0$ が分かる. $g(x)$ は $\log\varphi(x)$ の 2 階導関数であったから, これは $\log\varphi(x)$ が 1 次関数または定数であることを意味している. さらに, $\log\varphi(x)$ が周期関数であることから, $\log\varphi(x)$ は定数でなければならない. 従って $\varphi(x)$ も定数で, すべての点で $\varphi(x)=\pi$ であることがいえる. □

オイラーの反転公式とワイエルシュトラスの無限積表示 (定理 2.14) を用いると, $\sin x$ の無限積表示が得られる.

定理 2.23 ($\sin x$ の無限積表示)

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

[証明[2]] 定理 2.22 で x を x/π に置き換えると,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{x}{\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{\pi}\right)} = \frac{\pi}{-\frac{x}{\pi}\Gamma\left(\frac{x}{\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{x}{\pi}\right)} \\
&= -\frac{\pi^2}{x}\left\{\frac{x}{\pi}e^{\frac{Cx}{\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)e^{-\frac{x}{n\pi}}\right\}\left\{\left(-\frac{x}{\pi}\right)e^{-\frac{Cx}{\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right\} \\
&= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

□

注意 2.24 $\sin x$ の無限積表示を最初に発見したのはオイラーである. その最初の証明は現代の目で見るとあまり厳密ではないが, ここに記しておきたい.

$\sin x$ のテイラー級数展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

を無限次の多項式だと考える. すると, $\sin x = 0$ の解は $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ なので, 因数定理により $\sin x$ は

$$x(x^2-\pi^2)(x^2-2^2\pi^2)\cdots$$

で割り切れるはずである. よって, ある定数 a があって

$$\sin x = ax\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$$

と書けるはず. 一方, $x \to 0$ のとき $(\sin x)/x \to 1$ だから, $a = 1$ でなければならない.

オイラーは $\sin x$ の無限積表示を展開したときの x^3 の項をテイラー級数展開のそれと見比べることにより,

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \cdots = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

すなわち,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

という式を導いた. これは現代の言葉でいうと, (後期の授業「数学特論 II」で扱う予定の) リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s = 2$ における値を求めたことになる.

[2][追記] 厳密には, この証明の前にワイエルシュトラスの無限積表示が絶対収束することを示す必要があります (本稿では収束性は示していますが, まだ絶対収束までは示していません). 講義の時にこの点を見落としていました. 絶対収束については第 3 章の最後で改めて証明しているので, そちらも参照してください.

演習 2.25 $0 < x < 1$ において, 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{1+\tau}d\tau = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

(3) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2x-1}d\theta = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

2.7　x の大きな値での挙動

2.7.1　スターリングの公式

x が大きな値の時の階乗 $(x-1)!$ やガンマ関数 $\Gamma(x)$ を初等関数で近似するということを考える. まず, x が自然数のとき $(x-1)!$ は x の増加に伴い $x^{x-1}e^{-x+1}$ よりは速く増加するが, $x^x e^{-x+1}$ よりは速くない, ということはわかる.

命題 2.26 1 より大きい任意の自然数 x に対し,

$$x^{x-1}e^{-x+1} < (x-1)! < x^x e^{-x+1}.$$

[証明] 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ は狭義単調増加して $k \to \infty$ のとき e に収束し, 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}\right\}$ は狭義単調減少して e に収束するので, $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

が成り立つ. $k = 1, 2, \ldots, x-1$ に対する上記の式を全部かけ合わせれば,

$$\frac{x^{x-1}}{(x-1)!} < e^{x-1} < \frac{x^x}{(x-1)!}$$

を得る. これを変形して求める結果を得る. □

そこで,

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}$$

という関数を考えて, うまく $\mu(x)$ をとることにより $f(x)$ が定理 2.9 の (1)(2) を満たすようにしたい. (1)(2) だけ満たせば, あとは $f(x)$ を $f(x)/f(1)$ に置き換えることで $\Gamma(x)$ と一致させることができる.

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} xe^{-1}e^{\mu(x+1)-\mu(x)}$$

なので, $f(x+1) = xf(x)$ となるための必要十分条件は,

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$$

となる. この式の右辺を $g(x)$ と書くことにする. 上記の条件を満たすような $\mu(x)$ として

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \tag{2.6}$$

をとりたい. 右辺の級数が収束するならば, この $\mu(x)$ が条件を満たすことは明らかである. そこで収束性を示そう. まず, $|y| < 1$ の範囲で成り立つ次のテイラー級数展開[3]

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots$$

の y を $\frac{1}{2x+1}$ に置き換えてみる. すると, $x > 0$ ならば $0 < \frac{1}{2x+1} < 1$ なので, その範囲で

$$\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \cdots$$

が成り立つ. この両辺に $2x+1$ をかけ, 右辺の第 1 項を左辺に移項すると,

$$g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots$$

[3] $|y| < 1$ で絶対一様収束する幾何級数

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$$

を 0 から y まで積分すれば,

$$\int_0^y \frac{1}{1-t}dt = -\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots$$

となり, またこの式で y を $-y$ に置き換えることで,

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots$$

を得る. この 2 つの式を加えると, 本文中の式が得られる.

を得る．右辺の $5, 7, 9, \ldots$ を全部 3 に置き換えると値は大きくなるので, $x > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
0 < g(x) &< \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{3(2x+1)^4} + \frac{1}{3(2x+1)^6} + \cdots \\
&= \frac{1}{3(2x+1)^2}\left\{1 + \frac{1}{(2x+1)^2} + \left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)^3 + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{3(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} \\
&= \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}.
\end{aligned}
$$

よって $x > 0$ において, $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} |g(x+n)| = \sum_{n=0}^{m} g(x+n) &< \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+m+1)} \\
&< \frac{1}{12x}
\end{aligned}
$$

となることから, (2.6) の右辺の級数は絶対一様収束することが分かる．以上で, (2.6) により $\mu(x)$ を定義することができ, 上で定めた $f(x)$ が差分方程式 $f(x+1) = xf(x)$ を満たすことがいえた．またさらに, $x > 0$ において $0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}$ となること, いいかえれば, x に依存するある数 $\theta(x)$ が存在して,

$$
\mu(x) = \frac{\theta(x)}{12x}, \quad 0 < \theta(x) < 1
$$

となることも分かった．

次に, $f(x)$ が $x > 0$ において対数的凸であることを示す．

$$
\log f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x)
$$

で,

$$
\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x\right\}'' = \frac{2x+1}{2x^2} \geq 0
$$

より $\left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x$ は凸なので, 後は $\mu(x)$ が凸であることをいえばよい．それには (2.6) の右辺の各項の $g(x+n)$ がすべて凸であればよく, 従って $g(x)$ が凸であることだけ示せば十分である．それは, $x > 0$ において

$$
g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} \geq 0
$$

となることから従う.

以上により, $f(x)$ が定理 2.9 の (1)(2) を満たすことが分かったので, $a=1/f(1)$ とおけば,

$$\Gamma(x)=af(x)=ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}, \qquad \mu(x)=\frac{\theta(x)}{12x} \quad (0<{}^{\exists}\theta(x)<1),$$

を得る. また, 上記で x に自然数 n を代入し両辺に n をかければ, 次も得る:

$$n!=an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\mu(n)} \qquad (n=1,2,3,\dots). \tag{2.7}$$

次に, 定数 a を具体的に求めてみよう. 定義 2.1 で $x=1/2$ とすると, 系 2.17 より,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{n}\cdot 2^{n+1}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{(2n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{(2n)!\cdot 2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n}{2n+1} \qquad (\leftarrow (2.7) \text{ を適用}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^{2n+1}e^{-2n+2\mu(n)}\cdot 2^{2n+1}}{a(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n+\mu(2n)}\cdot 2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n}{2n+1} \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}e^{2\mu(n)-\mu(2n)}\cdot\frac{2n}{2n+1} \qquad (x\to\infty \text{ のとき } \mu(x)\to 0) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

となる. よって $a=\sqrt{2\pi}$ を得る.

定理 2.27 (スターリングの公式) $x>0$ において,

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}, \qquad \mu(x)=\frac{\theta(x)}{12x} \quad (0<{}^{\exists}\theta(x)<1).$$

また, x に自然数 n を代入し両辺に n をかければ,

$$n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\mu(n)} \qquad (n=1,2,3,\dots). \tag{2.8}$$

ここで, 保留にしていた定理 2.21 (ガウスの乗法公式) の証明をしよう. $x=1$ での値の決定は, 上記で定数 a を求めたのと似たような計算で行うことができる.

[定理 2.21 の証明] (2) は (1) で x を nx に置き換えれば得られるので, (1) だけ示す.

$$f(x)=\frac{n^{x-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)$$

とおき, これが定理 2.9 の (1)(2)(3) を満たすことを示せばよい. (1), (2) は定理 2.20 の証明とほぼ同様なので, あとは残りの (3) を示すことにする.

定義 2.1 で $x = k/n$ とすると,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^{\frac{k}{n}}}{\frac{k}{n}\cdot\frac{n+k}{n}\cdot\frac{2n+k}{n}\cdots\frac{mn+k}{n}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^{\frac{k}{n}}\cdot n^{m+1}}{k(n+k)(2n+k)\cdots(mn+k)}.\end{aligned}$$

上記で $k = 1, 2, \ldots, n$ とした結果をすべてかけあわせると, 分母は 1 から $mn + n$ までの自然数を 1 つずつかけあわせることになるので $(mn + n)!$ となる. すると,

$$\begin{aligned}&\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n}{n}\right) \\ =\ & \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^n m^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}}\cdot n^{mn+n}}{(mn+n)!} \\ =\ & \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^n m^{\frac{n+1}{2}}\cdot n^{mn+n}}{(mn)!\cdot(mn)^n}\cdot\frac{mn}{mn+1}\cdot\frac{mn}{mn+2}\cdots\frac{mn}{mn+n} \quad \text{(ここで分子分母の階乗に (2.8) を適用)} \\ =\ & \lim_{m\to\infty} \frac{(\sqrt{2\pi})^n m^{mn+\frac{n}{2}} e^{-mn+n\mu(m)}\cdot m^{\frac{n+1}{2}}\cdot n^{mn+n}}{\sqrt{2\pi}(mn)^{mn+\frac{1}{2}} e^{-mn+\mu(mn)}\cdot(mn)^n}\cdot\frac{mn}{mn+1}\cdot\frac{mn}{mn+2}\cdots\frac{mn}{mn+n} \\ =\ & \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}} \lim_{m\to\infty} e^{n\mu(m)-\mu(mn)}\cdot\frac{mn}{mn+1}\cdot\frac{mn}{mn+2}\cdots\frac{mn}{mn+n} \\ =\ & \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

となって, これにより $f(1) = 1$ を得る. □

2.7.2 スターリング級数

定理 2.27 (スターリングの公式) の誤差部分として出てきた $\mu(x)$ については積分表示も知られており, そこから $\frac{1}{12x}$ よりもっと精度の高い近似が得られる.

まず, ベルヌーイ多項式 $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ を思い出し, $g(x)$ を次のように積分表示する:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-B_1(t)}{t+x}dt &= \int_0^1 \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{t+x} - 1\right)dt = \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\log(t+x) - t\right]_0^1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = g(x).\end{aligned}$$

すると (2.6) により,

$$\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{-B_1(t)}{t+x+n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{-B_1(t-[t])}{t+x}dt=\int_0^{\infty}\frac{-B_1(t-[t])}{t+x}dt$$

を得る. ここで, $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す.

さて, $k=1,2,3,\ldots$ に対し $B_k(t-[t])$ は少なくとも t が整数のところ以外では微分可能で, 系 1.9 により,

$$\{B_k(t-[t])\}'=B_k'(t-[t])=kB_{k-1}(t-[t])$$

を満たす. よって部分積分法により[4],

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \int_0^{\infty}\frac{-B_1(t-[t])}{t+x}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\{B_2(t-[t])\}'\frac{1}{t+x}dt\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{B_2(t-[t])}{t+x}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}B_2(t-[t])\left(\frac{1}{t+x}\right)'dt\\ &= \frac{B_2(0)}{2x}-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{B_2(t-[t])}{(t+x)^2}dt.\end{aligned}$$

定理 1.8 (1) の (a) と系 1.7 により

$$\begin{cases} B_{2m}(0)=B_{2m}, \\ B_{2m+1}(0)=-B_{2m+1}=0 \end{cases} \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

となることに注意しつつ, さらに部分積分法を続けていくと,

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{B_2}{2x}-\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\{B_3(t-[t])\}'\frac{1}{(t+x)^2}dt\\ &= \frac{B_2}{2x}-\frac{1}{6}\left[\frac{B_3(t-[t])}{(t+x)^2}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{6}\int_0^{\infty}B_3(t-[t])\left(\frac{1}{(t+x)^2}\right)'dt\\ &= \frac{B_2}{2x}+\underbrace{\frac{B_3(0)}{6x^2}}_{0}-\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{B_3(t-[t])}{(t+x)^3}dt\\ &= \frac{B_2}{2x}-\frac{1}{3\cdot 4}\int_0^{\infty}\{B_4(t-[t])\}'\frac{1}{(t+x)^3}dt\\ &= \frac{B_2}{2x}-\frac{1}{12}\left[\frac{B_4(t-[t])}{(t+x)^3}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{12}\int_0^{\infty}B_4(t-[t])\left(\frac{1}{(t+x)^3}\right)'dt\\ &= \frac{B_2}{2x}+\frac{B_4}{12x^3}-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{B_4(t-[t])}{(t+x)^4}dt\\ &= \cdots\\ &= \frac{B_2}{2x}+\frac{B_4}{12x^3}+\cdots+\frac{B_{2m}}{2m(2m-1)x^{2m-1}}-\frac{1}{2m}\int_0^{\infty}\frac{B_{2m}(t-[t])}{(t+x)^{2m}}dt\end{aligned}$$

[4] $\{B_2(t-[t])\}'$ が整数点で定義されていないのが気になる人は, 区間 $n\le t\le n+1$ ごとに積分して後で総和をとっていると思えばよい. なお, $k\ge 3$ ならば $B_{k-1}(0)=B_{k-1}(1)$ となるので $B_{k-1}(t-[t])$ は整数点でも連続で, 従って $B_k(t-[t])$ はすべての点で微分可能となる.

となる．最後に出てきた級数は $m \to \infty$ のとき実は発散するのだが, $\mu(x)$ の良い近似を与えてくれる (いわゆる漸近展開になる). いま, 誤差項を

$$\begin{aligned} R_m(x) &= -\frac{1}{2m}\int_0^\infty \frac{B_{2m}(t-[t])}{(t+x)^{2m}}dt \\ &= \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)x^{2m+1}} - \frac{1}{2m+2}\int_0^\infty \frac{B_{2m+2}(t-[t])}{(t+x)^{2m+2}}dt \\ &= \frac{1}{2m+2}\int_0^\infty \frac{B_{2m+2}-B_{2m+2}(t-[t])}{(t+x)^{2m+2}}dt \end{aligned}$$

と書くことにする．$B_{2m+2}-B_{2m+2}(t-[t])$ は有界なので, ある定数 $M_m > 0$ があって[5]

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\le \frac{1}{2m+2}\int_0^\infty \left|\frac{B_{2m+2}-B_{2m+2}(t-[t])}{(t+x)^{2m+2}}\right| dt \\ &\le \frac{M_m}{2m+2}\int_0^\infty \frac{1}{(t+x)^{2m+2}}dt = \frac{M_m}{(2m+2)(2m+1)}\cdot\frac{1}{x^{2m+1}}. \end{aligned}$$

よって, ランダウの記法を用いれば, $x \to \infty$ のとき

$$R_m(x) = O\left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right)$$

となる．従って, 先程の級数は次の意味で $\mu(x)$ の漸近展開となっている．

定義 2.28 $\phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を $x > 0$ で定義された関数の列とする．関数列 $\{\phi_n(x)\}$ が**漸近列**であるとは, すべての n に対して, $x \to \infty$ のとき

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x))$$

が成り立つことをいう．また, 漸近列 $\{\phi_n(x)\}$ に対し,

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\phi_n(x) \qquad (a_n \in \mathbb{R})$$

の形の形式級数 (必ずしも収束する必要はない) を**漸近級数**と呼ぶ.

$x > 0$ で定義された関数 $F(x)$ が**漸近展開**

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n\phi_n(x)$$

をもつとは, ある漸近級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n\phi_n(x)$ が存在して, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $x \to \infty$ のとき

$$f(x) - \sum_{i=0}^n a_i\phi_i(x) = O(\phi_{n+1}(x))$$

が成り立つことをいう.

[5] ここでは証明しないが, $M_m = 2|B_{2m+2}|$ としてよい.

定理 2.29 $x > 0$ において, $\log\Gamma(x)$ は次の漸近級数 (**スターリング級数**と呼ばれる) に展開される:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x) &= \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x), \\ \mu(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)x^{2m-1}}.\end{aligned}$$

例えば $m = 3$ の項まで計算してみると,

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

だから,

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{12x^3} + \frac{B_6}{30x^5} + R_3(x) \\ &= \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} + R_3(x).\end{aligned}$$

$4 \leq x$ のとき, $|R_3(x)| \leq |R_3(4)| \leq 0.00000007266...$ となるので, この式で小数点以下第 6 位までは正確に $\mu(x)$ の値を計算できる. 従って同じくらいの精度で $\log\Gamma(x)$ の値, ひいては $\Gamma(x)$ の値を計算でき, さらに差分方程式を使って, すべての実数 x について $\Gamma(x)$ の近似値を計算することができるようになる.

参考文献

[1] エミール・アルチン 著, 上野健爾 訳「ガンマ関数入門」はじめよう数学 6, 日本評論社.

[2] 小松勇作「特殊函数」近代数学講座 9, 朝倉書店.