# 1　ベルヌーイ多項式・ベルヌーイ数

## 1.1　べき乗和の公式とベルヌーイ数

ベルヌーイ数とは, 17 世紀後半〜 18 世紀初頭に活躍した数学者ヤコブ・ベルヌーイが, 著書の中で, 下記に述べる**べき乗和の公式**を与える際に導入した数である.

**定理 1.1** 自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ と非負整数 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}. \tag{1.1}$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (2\text{ 項係数})$$

で, $B_j$ は次の定義で定まる数である.

**定義 1.2** 漸化式

$$\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

により定まる数 $B_0, B_1, B_2, \ldots$ を**ベルヌーイ数**という.

**演習 1.3** ベルヌーイ数 $B_0, B_1, B_2, \ldots$ の最初のいくつかの項を, 漸化式を使って計算せよ.

**注意 1.4** 上記の定義は参考文献 [1] に沿ったものである. ただし, 多くの本では $B_1$ の符号だけが異なるもの (すなわち $B_1 = -\frac{1}{2}$ で他は同じ) が採用されているので注意. 例えば, 参考文献 [2] では後者の定義を採用している.

[定理 1.1 の証明]

$$S_k(n) := \sum_{i=1}^{n} i^k$$

とおく. まず, 明らかに

$$S_0(n) = 1^0 + \cdots + n^0 = 1 + \cdots + 1 = n.$$

以下, $k \geq 1$ の場合を考える. 2 項展開により得られる式

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} m^j$$

において, $m = 1, 2, \ldots, n$ としたものを辺々加えると

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

を得る. すると, $\binom{k+1}{k} = k+1$ より,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left\{ (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right\}.$$

この式により, $k = 1, 2, \ldots$ に対する $S_k(n)$ を下から帰納的に求めていくことができる. 特に, 帰納法により, $S_k(n)$ は $n$ の $k+1$ 次多項式 (最高次係数は $1/(k+1)$) であることが分かる.

そこで, その多項式を, $x$ を変数にして $S_k(x)$ と書くことにする. さて, 定義から $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k$$

が成り立つが, 一般に, 「2 つの多項式 $f(x), g(x)$ について, $f(n) = g(n)$ がすべての自然数 $n$ について成り立つなら, 恒等的に $f(x) = g(x)$ である」ことに注意すると, 多項式として

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k \tag{1.3}$$

が成り立つ. ここで $x = 0$ とおくと, $S_k(1) = 1$ より,

$$S_k(0) = 0$$

を得る. つまり $S_k(x)$ の定数項は 0 である.

これで $S_k(x)$ の定数項と最高次係数が分かったので, あとは微分係数 $S_k^{(j)}(0)$ ($j = 1, \ldots, k$) が分かれば残りの係数も分かる. 式 (1.3) を $x$ に関して微分した式

$$S'_k(x+1) - S'_k(x) = k(x+1)^{k-1} \tag{1.4}$$

で $x = 0, 1, \ldots, n-1$ とおいて辺々加えると,

$$S'_k(n) - S'_k(0) = kS_{k-1}(n)$$

となる．これがすべての自然数 $n$ について成り立つので，$B_k = S'_k(0)$ とおくと，

$$S'_k(x) = kS_{k-1}(x) + B_k.$$

これを微分すると，

$$S''_k(x) = kS'_{k-1}(x). \tag{1.5}$$

$x = 0$ とおいて

$$S''_k(0) = kB_{k-1}.$$

$k = 1$ のときはここまでだが，$k \geq 2$ のときは (1.5) をさらに微分し，また (1.5) の $k$ を $k-1$ に置き換えた式を使うと，

$$S'''_k(x) = kS''_{k-1}(x) = k(k-1)S'_{k-2}(x).$$

ここで $x = 0$ とおいて，

$$S'''_k(x) = k(k-1)B_{k-2}.$$

以下同様にこれを繰り返していって，

$$S_k^{(j)}(0) = k(k-1)\cdots(k-j+2)B_{k-j+1} = \frac{k!}{(k-j+1)!}B_{k-j+1} \quad (j = 2, \ldots, k+1)$$

を得る．従って，$S_k^{(0)}(0) = S_k(0) = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
S_k(x) &= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!}x^j = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!}x^j \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{k!}{j!(k-j+1)!}B_{k-j+1}x^j = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k-j+1)!j!}B_{k-j+1}x^j \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{k-j+1} B_{k-j+1}x^j \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j x^{k+1-j} \quad (\leftarrow k-j+1 \text{ を改めて } j \text{ とした})
\end{aligned}$$

となる．$S_k(1) = 1^k = 1$ であるから，上式で $x = 1$ として両辺に $k+1$ をかければ，

$$k+1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j,$$

すなわち定義 1.2 の式 (1.2) を得る．また，

$$\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j} = \frac{k!}{j!(k+1-j)!} = \frac{1}{k+1-j}\cdot\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{1}{k+1-j}\binom{k}{j}$$

に注意すれば式 (1.1) が得られる． □

**定理 1.5 (ベルヌーイ数の母関数)**

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} t^i$$

が成り立つ (ただし, ここでは級数の収束性は問わない[1]).

[証明] 右辺に $e^t - 1$ をかけて $te^t$ となることを示せばよい:

$$\begin{aligned}
(e^t-1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}t^i &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}t^i\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!j!}t^{i+j} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i}{i!(n-i)!}\right)t^n \quad (\leftarrow i+j=n \text{ となる項をまとめた}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} B_i\right)}_{=n}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!} = te^t.
\end{aligned}$$

□

**注意 1.6** 数列 $\{B_i\}$ を生み出す関数という意味で, 定理 1.5 の左辺はベルヌーイ数の母関数と呼ばれる (左辺の関数の級数展開をもってベルヌーイ数 $B_i$ の定義とする方法もある). なお, 前の注意で述べた, ベルヌーイ数の定義を $B_1 = -\frac{1}{2}$ として他は同じとする場合 (参考文献 [2] などの定義) では, 左辺は $\frac{te^t}{e^t-1} - t = \frac{t}{e^t-1}$ となる. また, 次の系により, どちらの定義を採用しても $B_i$ を $(-1)^i B_i$ に置き換えれば他方に読み替えることができる.

**系 1.7** $i$ を 3 以上の奇数とするとき, $B_i = 0$.

[証明] 定理 1.5 の式から 1 次の項を取り去った $\frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2}$ が偶数次の項しかもたないこと, 言い換えると, 変換 $t \mapsto -t$ で不変であることを示せばよい. $t$ を $-t$ で置き換えてみると,

$$\frac{(-t)e^{-t}}{e^{-t}-1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{-t}{1-e^t} + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t-1} + t - \frac{t}{2} = \frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2}$$

となるから, 不変である. □

[1] きちんと定式化したい場合は, 形式的べき級数として考えているとする (参考文献 [1] の §1.3, §1.4 を参照). なお, ここでは証明しないが, 右辺の級数は $|t| < 2\pi$ の範囲で絶対収束する.

## 1.2　ベルヌーイ多項式

前節に出てきた多項式 $S_k(x)$ に対し, $B_k(x) := S'_k(x-1)$ とおくと, これは**ベルヌーイ多項式**と呼ばれる $k$ 次の多項式となる.

ベルヌーイ多項式は, 通常は次の定理の (1), (2), (3), (4) のいずれかにより定義される. ちなみに参考文献 [1] では (2), 参考文献 [2] では (1) により定義されている (ベルヌーイ数とは違い, 定義される多項式に差異はない).

**定理 1.8** (1) 各 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $B_k(x)$ は

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad B_k(1) = (-1)^k B_k(0) = B_k, \text{ かつ}, \\ \text{(b)} \quad B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1} \end{cases}$$

を満たす唯一の多項式である.

(2) 各 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $B_k(x)$ は次式を満たす唯一の多項式である:

$$\int_x^{x+1} B_k(y)dy = x^k.$$

(3) (母関数) 次の式が成立する (ただし, ここでは級数の収束性は問わない[2]):

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k. \tag{1.6}$$

(4) (ベルヌーイ数による具体的表示)

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} B_j x^{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

[証明] (1) (一意性) $f(x), g(x)$ を (a), (b) を満たす多項式とする. (a) より $f(0) = g(0)$ が成立する. 次に (b) で $x = 0, 1, 2 \ldots$ を順番に代入すれば, すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し $f(n) = g(n)$ であることがいえる. よって恒等的に $f(x) = g(x)$ となる.

($B_k(x)$ が (a), (b) を満たすこと) $S_0(x) = x$ より $B_0(x) = S'_0(x) = 1$ だから, $k = 0$ のときは OK. $k \geq 1$ とする. このとき, 前節の式 (1.4) で $x$ を $x - 1$ で置き換えれば (b) を得る. また, 定理 1.1 の証明により $B_k(1) = S'_k(0) = B_k$ である. あとは (b) で $x = 0$ とした式と系 1.7 により (a) を得る.

(2) 有理数係数の多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ から自分自身への $\mathbb{Q}$-線形写像 $I : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ を

$$I(f) = \int_x^{x+1} f(y)dy \quad (f(x) \in \mathbb{Q}[x])$$

[2] きちんと定式化したい場合は, 形式的べき級数として考えているとする. ここでは証明はしないが, 右辺の級数は $|t| < 2\pi$ の範囲で絶対収束する.

で定義する.

$$I(x^n)=\int_x^{x+1} y^n dy=\left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]_x^{x+1}=\frac{1}{n+1}\left\{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right\}=x^n+(\text{低次の項})$$

なので, $I$ を $\mathbb{Q}[x]$ の基底 $1,x,x^2,x^3,\dots$ で行列表現すると, 対角成分がすべて 1 の上三角行列となる. 特に $I$ は全単射である. さて, $B_k(x)=S_k'(x-1)$ と前節の式 (1.3) より,

$$I(B_k(x))=\int_x^{x+1} B_k(y)dy=S_k(x)-S_k(x-1)=x^k.$$

よって $B_k(x)$ は $I$ の逆写像 $I^{-1}$ による $x^k$ の像である.

(3) $t$ のべき級数としての右辺に, 各係数に項別に $I$ を施したものを考えると,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I(B_k(x))}{k!}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}t^k=e^{xt}$$

となる. 一方, 左辺も $t$ のべき級数とみて同様に $I$ を施すことを考えると, 線形性より $I(\frac{te^{xt}}{e^t-1})=\frac{t}{e^t-1}I(e^{xt})$ となり, さらに

$$I(e^{xt})=\int_x^{x+1} e^{yt}dy=\frac{e^{(x+1)t}-e^{xt}}{t}=\frac{e^t-1}{t}e^{xt}$$

なので, $I(\frac{te^{xt}}{e^t-1})=e^{xt}$. $I$ の単射性により, 右辺と左辺は等しい.

(4) $B_0(x)=1$ だから, $k=0$ のときは OK. $k\geq 1$ のとき, 前節の式 (1.5) の $x$ を $x-1$ に置き換えて,

$$B_k'(x)=S_k''(x-1)=kS_{k-1}'(x-1)=kB_{k-1}(x)$$

を得る. この式で $x=0$ とすると, (1) の (a) により,

$$B_k'(0)=kB_{k-1}(0)=(-1)^{k-1}kB_{k-1}.$$

定理 1.1 の証明でやったのと同様にこれを繰り返すと,

$$B_k^{(j)}(0)=(-1)^{k-j}\frac{k!}{(k-j)!}B_{k-j}\quad (j=0,\dots,k)$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}B_k(x) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{B_k^{(j)}(0)}{j!}x^j=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{k!}{j!(k-j)!}B_{k-j}x^j\\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{k!}{j!(k-j)!}B_jx^{k-j}\quad (\leftarrow k-j \text{ を改めて } j \text{ とした})\\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}B_jx^{k-j}.\end{aligned}$$

□

**系 1.9** (1) $B'_k(x) = kB_{k-1}(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.
(2) $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

[証明] (1) は定理 1.8 の証明中に既に示した.
(2) 母関数展開の式 (1.6) より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(1-x)}{k!} t^k &= \frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \frac{te^{-xt}}{1 - e^{-t}} = \frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} (-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k(x)}{k!} t^k.\end{aligned}$$

係数を比較することにより, 上の式を得る. □

**演習 1.10** ベルヌーイ多項式 $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \ldots$ の最初のいくつかを具体的に計算せよ.

**演習 1.11** ベルヌーイ多項式を使ったべき乗和の公式

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

が成立することを示せ.

**演習 1.12** 関数 $y = B_k(x)$ のグラフについて, 次を示せ.
(1) $k$ が偶数のとき, $y = B_k(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して対称である.
(2) $k$ が奇数のとき, $y = B_k(x)$ のグラフは点 $(\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称である.

## 1.3 双曲線関数・三角関数との関係

三角関数のうち正弦関数と余弦函数のべき級数展開はよく知られている:

$$\sin t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1}, \quad \cos t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m}.$$

それでは, 正接関数と余接関数

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

のべき級数展開はどうなるだろうか. 実は, これらの関数はベルヌーイ数を使ってべき級数展開される.

また, 三角関数とよく似た関数に双曲線関数というものがあり,

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!}$$

はそれぞれ双曲線正弦関数, 双曲線余弦関数と呼ばれる. また, 双曲線正接関数と双曲線余接関数が

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$$

と定義される. これらの関数も実はベルヌーイ数を使ってべき級数展開される.

**命題 1.13** $\tan t, \cot t, \tanh t, \coth t$ の $t = 0$ のまわりでのテイラー (またはローラン) 展開は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
\tan t &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(2^{2m}-1)2^{2m}B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}, && (1.7)\\
\cot t &= \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}, && (1.8)\\
\tanh t &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{2m}-1)2^{2m}B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}, && (1.9)\\
\coth t &= \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m}B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}. && (1.10)
\end{aligned}$$

[証明] ベルヌーイ数の母関数 (定理 1.5) から 1 次の項を引いたものを考えると, 系 1.7 より偶数次の項しか残らないので,

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m}.$$

一方,

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \frac{te^t - \frac{t}{2}e^t + \frac{t}{2}}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t}{2} \coth \frac{t}{2}.$$

よって,

$$\frac{t}{2} \coth \frac{t}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m}.$$

この式の $t$ を $2t$ に置き換えて両辺を $t$ で割れば, (1.10) を得る. また,

$$\begin{aligned}
\coth t + \tanh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} + \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2}{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})} = 2 \cdot \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{e^{2t} - e^{-2t}}\\
&= 2\coth(2t)
\end{aligned}$$

だから,

$$
\begin{aligned}
\tanh t &= 2\coth(2t) - \coth t = \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m}\cdot 2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1} - \frac{1}{t} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{2m}-1)2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}
\end{aligned}
$$

となり, (1.9) を得る.

一方, オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}\,t} = \cos t + \sqrt{-1}\sin t$ により,

$$
\coth(\sqrt{-1}\,t) = \frac{e^{\sqrt{-1}\,t} + e^{-\sqrt{-1}\,t}}{e^{\sqrt{-1}\,t} - e^{-\sqrt{-1}\,t}} = \frac{2\cos t}{2\sqrt{-1}\sin t} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cot t
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
\cot t &= \sqrt{-1}\coth(\sqrt{-1}\,t) = \sqrt{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{-1}\,t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} (\sqrt{-1}\,t)^{2m-1} \right\} \\
&= \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}
\end{aligned}
$$

となり, (1.8) が得られる. 同様に, $\tanh(\sqrt{-1}\,t) = \sqrt{-1}\tan t$ より,

$$
\begin{aligned}
\tan t &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\tanh(\sqrt{-1}\,t) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{2m}-1)2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} (\sqrt{-1}\,t)^{2m-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(2^{2m}-1)2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}
\end{aligned}
$$

となって, (1.7) を得る. □

# 参考文献


[1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信「ベルヌーイ数とゼータ関数」牧野書店.

[2] 小松勇作「特殊函数」近代数学講座 9, 朝倉書店.