数学特論 I (担当: 天野勝利)

期末試験解答例

問題 1. (1) ベルヌーイ数 B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 を求めよ.

(2) 自然数 n に対し, べき乗和 $1^4+2^4+\cdots+n^4$ を n の多項式で表せ.

(3) $1^4+2^4+\cdots+100^4$ を計算せよ.

[解答例] (1) 具体的な計算は演習 1.3 の解答例を参照. 結果としては,

$$B_0=1,\quad B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30}$$

となる.

(2) 定理 1.1 より,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^4 &= \binom{4}{0}B_0\frac{n^5}{5}+\binom{4}{1}B_1\frac{n^4}{4}+\binom{4}{2}B_2\frac{n^3}{3}+\binom{4}{3}B_3\frac{n^2}{2}+\binom{4}{4}B_4 n\\ &= \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\quad\left(=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)\right).\end{aligned}$$

(3) 上の式に $n=100$ を代入すると,

$$\begin{aligned}1^4+2^4+\cdots+100^4 &= \frac{10^{10}}{5}+\frac{10^8}{2}+\frac{10^6}{3}-\frac{10^2}{30}\\ &= 2,000,000,000+50,000,000+\underbrace{\frac{1,000,000-10}{3}}_{333,330}\\ &= 2,050,333,330.\end{aligned}$$

□

問題 2. $B(x,y)$ をベータ関数とするとき, 次の式を示せ.

$$B(x,x)B\left(x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{4x-1}x}.$$

[解答例] 定理 2.16, 定理 2.4, 定理 2.20 (2) を順番に用いて,

$$\begin{aligned}B(x,x)B\left(x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)}\cdot\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2x+1)}\qquad(\text{定理 } 2.16)\\ &= \frac{\Gamma(x)^2\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2x\Gamma(2x)^2}\qquad(\text{定理 } 2.4 \text{ より } \Gamma(2x+1)=2x\Gamma(2x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(x)^2\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2x\dfrac{2^{4x-2}}{\pi}\Gamma(x)^2\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (\text{定理 } 2.20\ (2)) \\
&= \frac{\pi}{2^{4x-1}x}.
\end{aligned}
$$

□

問題 3. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ の収束半径を求めよ.

[解答例] $c_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと,

$$
\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}
$$

($(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ に注意). よって,

$$
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{4}.
$$

従って, ダランベールの公式により, 収束半径は 4 である. □

問題 4. 次の値を求めよ.

(1) $e^{\sqrt{-1}\,\pi} - e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}}$ (2) $\cosh\left(\sqrt{-1}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (3) $\cos\sqrt{-1}$

[解答例] (1) オイラーの公式を用いると,

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{-1}\,\pi} - e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}} &= (\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi) - \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= (-1+0) - (0+\sqrt{-1}) = -1 - \sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

(2) オイラーの公式より $e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$, $e^{-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-1}$ なので,

$$
\cosh\left(\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}{2} = 0.
$$

(3) プリントの式 (3.3) より,

$$
\cos\sqrt{-1} = \frac{e^{-1}+e}{2}.
$$

□