14　線形写像と行列

K を実数全体 $\mathbb{R}$ または複素数全体 $\mathbb{C}$ とする.

例題. 次で定義される写像 $f : K^2 \to K^3$ が線形写像であるかどうかを判定せよ (判定理由も添えて). また, 線形写像になるものについてはそれを表示する行列も求めよ.

(1) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$　　(2) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

演習 14.1 次で定義される写像 $f : K^2 \to K^2$ が線形写像であるかどうかを判定せよ (判定理由も添えて). また, 線形写像になるものについてはそれを表示する行列も求めよ.

(1) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$　　(2) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$　　(4) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

演習 14.2 写像 $f : K^m \to K^l$ と写像 $g : K^n \to K^m$ がともに線形写像であるとき, 合成写像 $f \circ g : K^n \to K^l$ も線形写像であることを示せ. また, f, g が行列 A, B を用いて $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \in K^m$), $g(\boldsymbol{u}) = B\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} \in K^n$) と表せるとき, $f \circ g$ を表示する行列を求めよ.

演習 14.3 $f : K^n \to K^n$ を線形写像とし, 正方行列 A を用いて $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \in K^n$) と表されているとする. このとき,

$$f \text{ が全単射} \Leftrightarrow A \text{ が正則行列}$$

を示せ.

[ヒント] ($\Rightarrow$) もし f が全単射ならば逆写像 $f^{-1} : K^n \to K^n$ が存在する ($f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ (恒等写像)). まず, f^{-1} も線形写像になることを示せ.
($\Leftarrow$) A が正則行列ならば逆行列 A^{-1} が存在する.