11　行列式の計算/余因子

例題. 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \\ -3 & 8 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

演習 11.1 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

演習 11.2 (1) 次の等式を証明せよ (ファンデルモンドの行列式).

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

(2) 平面内に n 個の点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ があり, x 座標 $x_1, \dots, x_n$ がどの 2 つも互いに異なるとする. このとき, ある $n-1$ 次曲線

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

が存在して, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ をすべて通ることを示せ.

演習 11.3 A を成分がすべて整数の正方行列とする. このとき次を示せ:

$$\det A = \pm 1 \Leftrightarrow A \text{ は正則かつ } A^{-1} \text{ の成分もすべて整数.}$$