9 行列式の定義

K を実数全体 $\mathbb{R}$ または複素数全体 $\mathbb{C}$ とする.

例題. f を 2 個の 2 項縦ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in K^2$ の順序付き組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ に対しスカラー $f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in K$ を対応させる関数とする. もし f が次の (1), (2) を満たすならば

$$f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

(ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は K^2 の基本ベクトル) が成立することを示せ.

(1) 二重線形性. 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2 \in K^2$, $\lambda \in K$ に対し,

(1.1) $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2)$, $f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2)$,

(1.2) $f(\lambda \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1, \lambda \boldsymbol{v}_2) = \lambda f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

(2) 歪対称性. 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in K^2$ に対し, $f(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) = -f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

演習 9.1 f を 3 個の 3 項縦ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in K^3$ の順序付き組 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ に対しスカラー $f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \in K$ を対応させる関数とする. もし f が次の (1), (2) を満たすならば

$$f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

(ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は K^3 の基本ベクトル) が成立することを示せ.

(1) 三重線形性. 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_3 \in K^3$, $\lambda \in K$ に対し,

(1.1)
$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) + f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3),\\
&f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) + f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3),\\
&f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{u}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) + f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_3),
\end{aligned}$$

(1.2) $f(\lambda \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \lambda \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \lambda \boldsymbol{v}_3) = \lambda f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.

(2) 歪対称性. 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in K^3$ に対し, $f(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2) = -f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.

[コメント] 教科書の 4.5.1 節を参考にして, 4×4 の行列式やさらに一般の場合についても考えてみてください.

演習 9.2 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$