

7 行列の階数と連立 1 次方程式

演習 7.1 A を階数 r の $m \times n$ 行列とすると、ある $m \times r$ 行列 P と $r \times n$ 行列 Q が存在して $A = PQ$ となることを示せ。またこのとき、 P, Q の階数は共に r になることも示せ。

[ヒント] とりあえず A が最初から階数標準形だった場合に P, Q をどのようにとれば良いかを考えてみる。 (P, Q をブロック分割して考えると良いかもしれない。)

演習 7.2 A を n 次正方行列、 c を定数とする。もし $cE_n - A$ が正則でないならば、ある n 項縦ベクトル x があって $x \neq 0$, $Ax = cx$ を満たすことを示せ。

[コメント] 上の条件を満たす c を A の固有値、 x を A の固有ベクトルという。

演習 7.3 a, b を実数とする。 xyz 空間座標に関する方程式

$$x + ay + az = 1$$

$$ax + y + az = b$$

$$ax + ay + z = b$$

で与えられる三つの平面が、(1) ちょうど一点を共有するための条件、(2) ちょうど一本の直線を共有するための条件、(3) 三つとも同じ一つの平面であるための条件、(4) 一つも共有点をもたないための条件、をそれぞれ a, b を用いて述べよ。