

4 特殊な行列

演習 4.1 (1) A が対角行列で, その対角成分がどの 2 つも互いに異なるとする. このとき $AX = XA$ を満たす行列 X をすべて求めよ.

(2) A が n 次対角行列で, 次のようにブロック分割されるものとする:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 E_{n_1} & & & O \\ & a_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_r E_{n_r} \end{pmatrix}.$$

ただし, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ で, a_1, a_2, \dots, a_r はどの 2 つも互いに異なる定数とする. このとき $AX = XA$ を満たす行列 X をすべて求めよ.

演習 4.2 A を 3 次の交代行列とすると, 任意の自然数 m について A^{2m+1} は A のスカラー倍になることを示せ.

[ヒント] ${}^t A = -A$ より, A の対角成分はすべて 0 で, 右上の 3 つの成分のみを使って A が表示できる. それを踏まえた上で, とりあえず $m = 1$ の場合を具体的に計算してみると良い. あとは m に関する帰納法で.

演習 4.3 A が n 次の上三角行列で, その対角成分がすべて 0 であるとするとき, $A^n = O$ となることを示せ.