

### 3 行列の積/正則行列/ブロック分割

演習 3.1 次の行列の積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

演習 3.2 (1)  $A, B$  を  $n$  次の正方行列とすると  $AB, BA$  も  $n$  次の正方行列となるが,  $AB = BA$  が成立するとは限らない.  $AB \neq BA$  となるような例を挙げよ.

(2) 行列の積  $AB$  が零行列であったとしても  $A, B$  のどちらかが零行列であるとは限らない.  $A, B$  がどちらも零行列ではないのに  $AB$  が零行列となるような例を挙げよ.

演習 3.3  $A$  を単位行列ではない正方行列とする. このときもし  $A^2 = A$  ならば,  $A$  は正則行列でないことを示せ.

演習 3.4  $A$  を  $m \times n$  行列,  $a$  を定数とするとき,  $k = 1, 2, 3, \dots$  に対し

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k E_m & ka^{k-1} A \\ O & a^k E_n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.