1 平面ベクトルのスカラー倍と和

例題 (教科書の問題 1.1). 平面ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ の線形結合 $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ および $\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

演習 1.1 平面ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ について, 次の線形結合を求めよ.
(1) $3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$
(2) $-\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3$

例題. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.
(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合として表せ.
(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は平面ベクトル全体 $\mathbb{R}^2$ を張ることを示せ.

演習 1.2 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ とする.
(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合として表せ.
(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は平面ベクトル全体 $\mathbb{R}^2$ を張ることを示せ.

演習 1.3 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ とする.
(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合の表し方は一意的でないことを具体例を挙げて示せ.
(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合の表し方は一意的であることを示せ.

[ヒント] (1) 例えば $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合として表すことができれば, 一つの具体例となる. なお, 式を変形すれば, すべての例は結局, $\mathbf{0}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合として表す表し方が $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3$ 以外にもあること ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形従属であること) を示していることになる.
(2) 教科書 p.3〜p.4 に書いてあるように, $\mathbf{0}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表す表し方が $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2$ ただ一通りであること ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線形独立であること) を示せば十分で, そこからすべての線形結合の表し方が一意的であることがいえる.