4. 有限生成アーベル群の基本定理 (その２)

問題 4.1. M を $\mathbb{Z}^n$ の任意の部分群とするとき, ある整数行列 A が存在して $M = \operatorname{Im} A$ となることを示せ. (★★★)

[ヒント] 本質的には教科書の問題 2.29 と同じ.

定理. (有限生成アーベル群の基本定理; 教科書の定理 2.38.) G を有限生成アーベル群とすると, 自然数 $e_1, \ldots, e_k$ と非負整数 r があって,

$$G \cong \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r, \quad e_1 > 1,\ e_i \mid e_{i+1}\ (i = 1, \ldots, k-1).$$

(ただし, 上記は $k = 0$ の場合も含み, その場合は有限巡回群の部分は出てこないものとする.) しかも $e_1, \ldots, e_k$ および r は G により一意的に決まる.

[定理前半の証明] $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ を有限生成アーベル群, G の積は乗法的に書くことにする. $\mathbb{Z}^n$ から G への自然な全射準同型

$$\phi : \mathbb{Z}^n \to G, \quad {}^t(z_1, \ldots, z_n) \mapsto g_1^{z_1} \cdots g_n^{z_n}$$

をとると, 問題 4.1 により, ある整数行列 A が存在して $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Im} A$ となる. すると準同型定理により,

$$G \cong \mathbb{Z}^n / \operatorname{Im} A = \operatorname{Coker} A.$$

従って, (その１) の命題により, G は表記のような巡回群の直積に分解される. □

一意性の証明は教科書に概略のみ書いてあるので, 演習問題でそれを補完することにする. 以下に出てくるアーベル群 G について, 上記同様, 積は乗法的に記述する. (ただし問題 4.5 の一部は除く.) また G の単位元を e と書く.

問題 4.2. アーベル群 G に対し $T(G) = \{g \in G \mid {}^\exists m \in \mathbb{Z}_{>0},\ g^m = e\}$ とおく.

(1) $T(G)$ は G の部分群になることを示せ. (★)

(2) G_1 を有限アーベル群, G_2 を自由アーベル群, $G \cong G_1 \times G_2$ とする. このとき $T(G) \cong G_1$, $G/T(G) \cong G_2$ となることを示せ. (★)

問題 4.3. r_1, r_2 を非負整数とするとき, $\mathbb{Z}^{r_1} \cong \mathbb{Z}^{r_2} \Rightarrow r_1 = r_2$ を示せ. (★)

[ヒント] 問題 2.1 (1) を使ってよい.

問題 4.4. 有限アーベル群 G が, ある k 個の自然数 $n_1, \ldots, n_k$ を用いて

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$$

と分解されているとする. 素数 p に対し, $H_p = \{g \in G \mid g^p = e\}$ とおくと, これは G の部分群になる.

(1) $n_1, \ldots, n_k$ のうち p で割り切れるものの個数を $k(p)$ と書くとき, H_p の位数は $p^{k(p)}$ になることを示せ. (★★★)

(2) $n_i' = \begin{cases} n_i/p & (p \mid n_i \text{ のとき}) \\ n_i & (p \nmid n_i \text{ のとき}) \end{cases}$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば,

$$G/H_p \cong \mathbb{Z}/n_1'\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k'\mathbb{Z}$$

となることを示せ. (★★★)

[定理後半の証明] G が自然数 $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ と非負整数 r_1, r_2 を用いて

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{r_1} \quad (e_1 > 1,\ e_i \mid e_{i+1}\ (i = 1, \ldots, k-1)) \\ &\cong \mathbb{Z}/f_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/f_l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{r_2} \quad (f_1 > 1,\ f_i \mid f_{i+1}\ (i = 1, \ldots, l-1)) \end{aligned}$$

と二通りに分解されたとする. このとき問題 4.2 により $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^{r_1} \cong \mathbb{Z}^{r_2}$ となるから, 問題 4.3 により $r_1 = r_2$ を得る. よって, 必要ならば G を $T(G)$ に置き換えて, 最初から G が有限アーベル群であったとしてよい.

以下, G が有限アーベル群の場合 $(r_1 = r_2 = 0)$ を G の位数 $|G|$ に関する帰納法で示す. $|G| = 1$ のときは $k = l = 0$ となり明らか. $|G| > 1$ のとき, 位数が $|G|$ より小さい有限アーベル群については定理の後半が成立すると仮定する. $|G|$ を割り切る素数を適当にひとつ選び p とし, 問題 4.4 のように H_p をとる. 問題 4.4 (1) により, $e_1, \ldots, e_k$ のうち p で割り切れるものの個数と $f_1, \ldots, f_l$ のうち p で割り切れるものの個数は一致する. この数を $k(p)$ $(= l(p))$ とおく. 仮定より $e_1, \ldots, e_{k-k(p)}, f_1, \ldots, f_{l-k(p)}$ は p で割り切れず, $e_{k-k(p)+1}, \ldots, e_k, f_{l-k(p)+1}, \ldots, f_l$ は p で割り切れる. そこで,

$$e_i' = \begin{cases} e_i/p & (k - k(p) + 1 \le i \le k) \\ e_i & (1 \le i \le k - k(p)), \end{cases} \qquad f_i' = \begin{cases} f_i/p & (l - k(p) + 1 \le i \le l) \\ f_i & (1 \le i \le l - k(p)), \end{cases}$$

とおけば, 問題 4.2 (2) により

$$G/H_p \cong \mathbb{Z}/e_1'\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k'\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/f_1'\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/f_l'\mathbb{Z}.$$

ここで, もし $e_1' = 1$ だったとすると, それは $e_1, \ldots, e_k$ がすべて p で割り切れることを意味するので, $k = k(p) = l(p) \le l$ である. このときさらに $f_1' \ne 1$ であったとすると非自明な巡回群の個数が合わず帰納法の仮定に反するので, $f_1' = 1$, $k = l$ を得る. 同様に考えていけば, $e_1', \ldots, e_k'$ のうち 1 が出てくる回数と $f_1', \ldots, f_l'$ のうち 1 が出てくる回数は一致することが分かる. このことと帰納法の仮定により, $e_i' = f_i'$ $(i = 1, \ldots, k = l)$ を得る. 従って $e_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, k = l)$. □

問題 4.5. 次で与えられる有限生成アーベル群 G について, G から $\mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ の形の群への同型写像を具体的に構成せよ. (各 ★★)

(1) $G = \{{}^t(l,m,n) \in \mathbb{Z}^3 \mid l - 3m - 2n = 0\}$.

(2) $G = \langle {}^t(1,2,3),\ {}^t(1,1,1),\ {}^t(-1,0,1)\rangle \subset \mathbb{Z}^3$.

(3) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(4) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(5) $G = \langle 2,\ \sqrt{2}\rangle \subset \mathbb{R}^\times$.

(6) $G = \langle \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{3}\rangle \subset \mathbb{R}^\times$.

(7) $G = \left\langle \sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(8) $G = \left\langle -1,\ \ \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(9) $G = \left\langle \sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}\right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(10) $G = \left\langle 1+\sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(11) S_n を n 次の対称群, A_n を S_n の中の偶置換全体のなす部分群とするときの $G = S_n/A_n$.

(12) クラインの 4-群. $G = \{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\} \subset S_n\ (n \geq 4)$.