2. 有限生成アーベル群の基本定理 (その１)

問題 2.1. (1) アーベル群 $\mathbb{Z}^n = \{{}^t(z_1, \ldots, z_n) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$ の n 個の元 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{Z}^n$ を生成するならば, 行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ はユニモジュラー行列となることを示せ. (★★)

(2) $\mathbb{Z}^n$ の部分群 M が m 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in M$ で生成されているとする. $Q = (q_{ij})$ を m 次のユニモジュラー行列とし, $\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^m q_{ij}\boldsymbol{a}_i$ $(j = 1, \ldots, m)$ とおくと (つまり $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)Q$ となるように $\boldsymbol{b}_j$ たちをとると), $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ は M を生成することを示せ. (★★)

以下, $n \times m$ 整数行列 A を写像 $A : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ と同一視する.

命題. 任意の $n \times m$ 整数行列 A について, $\operatorname{Coker} A = \mathbb{Z}^n / \operatorname{Im} A$ は巡回群の直積に分解される. すなわち, ある自然数 $e_1, \ldots, e_r$ が存在して,

$$\operatorname{Coker} A \cong \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}, \quad e_i | e_{i+1}\ (i = 1, \ldots, r-1)$$

となる. (ここで, $e_i = 1$ となる部分は取り除いても良い.)

[証明] A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ とおくと,

$$\operatorname{Im} A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m\} = \{\sum_{i=1}^m z_i\boldsymbol{a}_i \mid z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}\} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle.$$

PAQ が単因子標準形となるようなユニモジュラー行列 P, Q をとり,

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = P^{-1}, \quad (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = AQ$$

となるように $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \in \mathbb{Z}^n$ を定めると, 問題 2.1 (2) により,

$$\mathbb{Z}^n = \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle, \quad \operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle.$$

ここで A の単因子を $(e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0)$ とすると,

$$(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = P^{-1}PAQ = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)PAQ = (e_1\boldsymbol{x}_1, \ldots, e_r\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$$

であるから, $\operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle = \langle e_1\boldsymbol{x}_1, \ldots, e_r\boldsymbol{x}_r \rangle$ となり,

$$\operatorname{Coker} A = \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle / \langle e_1\boldsymbol{x}_1, \ldots, e_r\boldsymbol{x}_r \rangle \cong \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_r\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n-r}$$

を得る. □

例題. 整数行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ について, $\mathrm{Coker}\, A$ を巡回群の直積に分解せよ. 同型写像も具体的に構成すること.

[解答例] PAQ が単因子標準形となるようなユニモジュラー行列 P, Q を求めると, たとえば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. A の単因子は $(1, 3, 0)$ である:

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

さらに, $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = P^{-1}$ となるような $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{Z}^3$ を求めると,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る. また,

$$AQ = P^{-1}PAQ = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)PAQ = (\boldsymbol{x}_1, 3\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{0})$$

で, 問題 2.1 (2) により $\mathbb{Z}^3 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$, $\mathrm{Im}\, A = \langle \boldsymbol{x}_1, 3\boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる.

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3$ に対し, $\boldsymbol{x}$ の $\mathrm{Coker}\, A = \mathbb{Z}^3 / \mathrm{Im}\, A$ における像を $\bar{\boldsymbol{x}}$ と書くことにする. $\boldsymbol{x} = {}^t(z_1, z_2, z_3)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= P^{-1}P\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ 3z_1 + 2z_2 \\ -2z_1 - 2z_2 + z_3 \end{pmatrix} \\ &= (z_1 + z_2)\boldsymbol{x}_1 + (3z_1 + 2z_2)\boldsymbol{x}_2 + (-2z_1 - 2z_2 + z_3)\boldsymbol{x}_3. \end{aligned}$$

従って, 以下のような同型写像がとれる:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Coker}\, A & = & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle / \langle \boldsymbol{x}_1, 3\boldsymbol{x}_2 \rangle & \cong & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \bar{\boldsymbol{x}} = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}} & = & \begin{array}{l} (z_1 + z_2)\bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \quad + (3z_1 + 2z_2)\bar{\boldsymbol{x}}_2 \\ \quad + (-2z_1 - 2z_2 + z_3)\bar{\boldsymbol{x}}_3 \end{array} & \mapsto & (2z_2 + 3\mathbb{Z},\ -2z_1 - 2z_2 + z_3). \end{array}$$

□

問題 2.2. 次で与えられる整数行列 A について, $\mathrm{Coker}\, A$ を巡回群の直積に分解せよ. 同型写像も具体的に構成すること. (各★★)

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ -1 & 6 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -12 & -16 \end{pmatrix}$