1. 整数行列の単因子論

問題 1.1. (教科書の補題 2.32) A を $n \times n$ の整数行列とする. 次を示せ. (★★★)

$$A \text{ は正則かつ } A \text{ の逆行列も整数行列} \Leftrightarrow \det A = \pm 1.$$

この条件を満たす整数行列のことを**ユニモジュラー行列**と呼ぶ.

定理. (教科書の定理 2.34, 2.35) A を $m \times n$ の整数行列とする. このとき A に次の (1)〜(3) の変形 (ユニモジュラー行列による基本変形):

(1) A の 2 つの行 (または列) を交換する.
(2) A のある行 (または列) の整数倍を他の行 (または列) に加える.
(3) A のある行 (または列) を ± 1 倍する.

を何回か施して, 次の形にできる.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} e_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & e_2 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & e_3 & \ddots & \vdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_r & \\ \hline & & O & & & O \end{array}\right)$$

ただし, $r = 0$ の場合も含める. ここで, 各 e_i は正整数で, e_i は e_{i+1} の約数である.

このとき $(e_1, e_2, \ldots, e_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-r})$ を A の**単因子**と呼び, 結論の形の行列を A の **単因子標準形**と呼ぶ (ここで, l は m, n のうち小さい方). 単因子は A に対して一意的に定まる.

例題. 下記は, 整数行列 A に整数成分の基本変形を繰り返して単因子標準形 A' を求める手順を表している. これをもとに, $PAQ = A'$ を満たすユニモジュラー行列 P, Q を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(v)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(vi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A'$$

[解答例１] それぞれのステップに対応する整数基本行列をかけあわせて P, Q を求める.

行基本変形 (基本行列を左からかける): (i)(v)(vi)
列基本変形 (基本行列を右からかける): (ii)(iii)(iv)

であるから,

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{(vi)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(v)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(i)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(ii)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(iii)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(iv)}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[解答例 2] 単位行列に行基本変形 (i)(v)(vi) を施した行列が P, 列基本変形 (ii)(iii)(iv) を施した行列が Q である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(v)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(vi)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = P,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Q.$$

※ 上記で, (vi) を列基本変形をみなした場合, 答えは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

問題 1.2. 下記 (1)〜(6) は, 整数行列 A に整数成分の基本変形を繰り返して単因子標準形 A' を求める手順を表している. これをもとに, $PAQ = A'$ を満たすユニモジュラー行列 P, Q を求めよ. (各 ★★)

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = A'$

(2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 74 \end{pmatrix} = A'$

(3) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = A'$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$
A'

(6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A'$

問題 1.3. 次の整数行列の単因子標準形を求めよ. (各 ★)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 6 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$