2013 年度 代数学概論 IIA

既約成分・連結成分

天野勝利

2013 年 7 月 3 日〜7 月 10 日 (予定)

参考文献

W.C. Waterhouse, "Introduction to affine group schemes", Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます．この資料は本の Ch. 5 にあたる部分の講義ノートです.

5.1　代数的集合の既約成分

定義 5.1 X を位相空間とする.

(1) 開かつ閉な X の部分集合を**開閉集合** (**clopen set**) と呼ぶ.

(2) X の開閉集合が X と $\emptyset$ しかないとき, X は**連結** (**connected**) という．また, X の連結な部分集合のうち極大なものを**連結成分** (**connected component**) と呼ぶ.

(3) X が二つの真閉部分集合の和集合として表せないとき, X は**既約** (**irreducible**) という.

命題 5.2 X を位相空間とするとき, 次の (i)–(iv) は同値:

(i) X は連結,

(ii) 2 点からなる離散位相空間 $\{0,1\}$ への連続写像 $X \to \{0,1\}$ はただ 2 つ (すべて 0 かすべて 1 か) しか存在しない,

(iii) $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすような開集合 U_1, U_2 は存在しない,

(iv) $X = C_1 \cup C_2$, $C_1 \neq \emptyset \neq C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ を満たすような閉集合 C_1, C_2 は存在しない.

命題 5.3 $\{X_\lambda\}$ が位相空間 X の連結な部分集合の族で, $\bigcap_\lambda X_\lambda \neq \emptyset$ を満たすとき, $\bigcup_\lambda X_\lambda$ は連結である．従って, 2 つの異なる連結成分は共通部分をもたない.

命題 5.4 X を位相空間, C を X の部分集合とするとき,

$$C \text{ が } X \text{ の連結成分} \Leftrightarrow C \text{ は } X \text{ の空でない開閉集合のうち極小なもの.}$$

命題 5.5 X を位相空間とするとき, 次の (i)–(iii) は同値:

(i) X は既約,

(ii) X のすべての空でない開集合は稠密,

(iii) X の二つの空でない開集合は必ず交わる.

特に, 既約な位相空間は連結である.

定理 5.6 k を体, $k^n \supset X$ を代数的集合とする. このとき,

$$X \text{ が既約} \Leftrightarrow k[X] \text{ が整域}.$$

[証明] ($\Rightarrow$) $k[X]$ が整域でないとすると, ある $0 \neq g_1, g_2 \in k[X]$ があって $g_1 g_2 = 0$ となる. $Y_i = \{x \in X \mid g_i(x) = 0\}$ $(i = 1, 2)$ とすると, 各 Y_i は X の真閉部分集合で, しかも $Y_1 \cup Y_2 = X$ となるから, X は既約でない.

($\Leftarrow$) X が既約でなかったとすると, ある真閉部分集合 $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ があって $X = Y_1 \cup Y_2$ となる. このときある $0 \neq g_1, g_2 \in k[X]$ があって, $g_1(x) = 0$ $({}^\forall x \in Y_1)$, $g_2(y) = 0$ $({}^\forall y \in Y_2)$, 従って $g_1(x) g_2(x) = 0$ $({}^\forall x \in X)$ となるから, $k[X]$ の元としては $g_1 g_2 = 0$. よって $k[X]$ は整域ではない. □

定理 5.7 k を体とする. k^n の任意の代数的集合 S は有限個の既約閉部分集合 $X_1, \ldots, X_m$ (ただし $i \neq j$ なら $X_i \not\subset X_j$) によって $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ と表される. また, そのような $\{X_1, \ldots, X_m\}$ は S により一意的に定まる.

[証明] k 上の n 変数多項式環はネーター環なので, イデアルたちからなる空でない集合には極大元がある; ということは, k^n の代数的集合たちからなる空でない集合には極小元がある. このことから, k^n の任意の代数的集合は有限個の既約閉部分集合たちの和集合として表されることがいえる: もしそうでないとすると, 有限個の既約閉部分集合たちの和集合として表されないような k^n の代数的集合たちの集合に極小元が存在することになるので, それを X とする. X は既約ではありえないので, ある真閉部分集合 $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ があって $X = Y_1 \cup Y_2$ となる. X の極小性により, Y_1 と Y_2 はそれぞれ有限個の既約閉部分集合たちの和集合として表される. すると X もそうであることになるが, これは矛盾である.

以上により, 任意の代数的集合 $S \subset k^n$ は定理の前半の主張のように $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ と表されることが分かった. また, $S \supset Y$ を既約部分集合とすると, $Y = \bigcup_{i=1}^m (Y \cap X_i)$ より, ある i があって $Y = Y \cap X_i \subset X_i$ となる. 従って, $\{X_1, \ldots, X_m\}$ は S の極大な既約部分集合の全体と一致するので, S により一意的に定まる. □

定義 5.8 定理 5.7 の各 X_i を S の**既約成分** (**irreducible component**) と呼ぶ. また, $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ を S の**既約分解** (**irreducible decomposition**) という.

系 5.9 S を体 k 上の代数的集合, $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ を S の既約分解とする. $S \supset O$ を開集合とするとき, もしすべての $i = 1, \ldots, m$ について $O \cap X_i \neq \emptyset$ ならば O は稠密である.

[証明] 各 i について $X_i = (\bar{O} \cap X_i) \cup (X_i \setminus O)$ で, $O \cap X_i \neq \emptyset$ より $X_i \setminus O \neq X_i$ だから, $X_i = \bar{O} \cap X_i \subset \bar{O}$. よって $\bar{O} = S$. □

系 5.10 k を体とするとき, k^n の代数的集合は有限個の連結成分しかもたない. また, それぞれの連結成分はいくつかの既約成分の和集合である.

[証明] $k^n \supset S$ を代数的集合, $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ をその既約分解とする. C を S の連結成分とするとき, $X_i \cap C \neq \emptyset$ なら $X_i \cup C$ は連結だから $X_i \subset C$ となる. よって $C = \bigcup_i (X_i \cap C) = \bigcup_{X_i \cap C \neq \emptyset} X_i$. □

命題 5.11 $k \subset L$ を体の拡大とする. $k^n \supset S$ を既約な代数的集合とするとき, S の L^n における閉包も既約である.

[証明] S の L^n における閉包の中で S は稠密だから, これは明らか. □

5.2 アフィン代数群の連結成分

定理 5.12 S を体 k 上のアフィン代数群, $S \supset S^\circ$ を単位元 e を含む連結成分 (これを**単位連結成分** (**identity component**) と呼ぶ) とする. このとき, S° は指数有限の正規部分群で, しかも S の既約成分のひとつである. さらに, S のすべての既約成分は S° の剰余類として得られる.

[証明] $S = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ を S の既約分解とする. 既約分解の一意性により $x \in X_1$, $x \notin X_i$ $(i = 2, \ldots, m)$ を満たす x が存在する. 任意の $g \in S$ に対し, $y \mapsto gx^{-1}y$ は S の自己同相写像で g はそれによる x の像であるから, やはり g を含む S の既約成分は唯一つしか存在しない. よって, $X_1, \ldots, X_m$ はどの二つも共通部分をもたず, 故に系 5.10 より連結成分の全体と一致することが分かる. 従って特に S° は S の既約成分の一つである.

任意の $x \in S^\circ$ について, xS° は (同相写像 $y \mapsto xy$ による S° の像なので) S の既約成分で, しかも x を含むから $xS^\circ = S^\circ$ である. よって S° は積で閉じている. 同様に $(S^\circ)^{-1}$ も ($y \mapsto y^{-1}$ による S° の像なので) S の既約成分で, かつ e を含むので $(S^\circ)^{-1} = S^\circ$. 従って, S° は S の部分群である. またさらに, 任意の $g \in S$ について, $gS^\circ g^{-1}$ も ($y \mapsto gyg^{-1}$ による S° の像なので) S の既約成分で, かつ e を含むので $gS^\circ g^{-1} = S^\circ$. よって S° は正規部分群. 最後に, 各剰余類 gS° も ($y \mapsto gy$ による S° の像ゆえ) S の既約成分であり, しかも $S = \bigcup_{g \in S} gS^\circ$ だから, これにより残りの主張が従う. □

5.3 癒着する連結成分

次に, 代数的集合の連結性や既約性の概念をアフィンスキームにまで拡張することを考えたい. そのためには, アフィンスキームに対して何らかの適切な位相空間を定義して関連付けたり, また逆に位相空間論の議論を圏論あるいは代数的な議論に読み替えていったりする必要がある. これから我々はその両方を行っていきたいのだが, その前に少し注意すべき点がある. 素朴に考えると, 少なくとも代数的集合に対応しているアフィンスキームについてはその代数的集合の連結性・既約性がそのままアフィンスキームとしての連結性・既約性に反映されるように思えるかもしれない. ところが実は連結性に関しては, 非連結な代数的集合に由来するアフィンスキームが連結になるということが起こり得る. 以下でそのような一つの例を提示して, アフィンスキームに関連付ける位相空間は代数的集合よりも多くの「点」を持っていなければならないことをみておくことにする.

まずはアフィンスキームの連結性をどう考えるかということが問題になるが, ここではとりあえず命題 5.2 (ii) の類似として定義しておくことにする. 離散位相空間 $\{0,1\}$ にあたるアフィンスキームとして, 第 2 章の 2.3 節のように $\Gamma = \{0,1\}$ の「有限定数スキーム」 $\mathrm{Sp}\, k^{\{0,1\}}$ をとり, これをまた $\{0,1\}$ と書くことにする[1].

定義 5.13 k を体, $\mathbf{F}$ を k 上の任意のアフィンスキームとする. $\mathbf{F}$ が連結であるとは, $\mathbf{F}$ から有限定数スキーム $\{0,1\}$ への関手間射がただ 2 つしかない (つまり $\#\mathrm{Alg}_k(k^{\{0,1\}}, k[\mathbf{F}]) = 2$ となる) ことをいう. これは $k[\mathbf{F}]$ が非自明なベキ等元をもたないことと同値である.

ここで, $\mathbb{R}^2$ の代数的集合 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-1)((x-4)^2+y^2-1) = 0\}$ を考えてみよう. S は交わらない二つの円なので, 明らかに連結ではない. 一方, これに対応するアフィンスキームを $\mathbf{F}_S = \mathrm{Sp}\,\mathbb{R}[S]$ とおく. すると意外なことに, 上の定義の意味で $\mathbf{F}_S$ は連結となる.

[証明] $\mathbb{R}[X,Y]$ を 2 変数多項式環, $f_1 = X^2+Y^2-1$, $f_2 = (X-4)^2+Y^2-1$ とし, それらで生成されるイデアルを $I_1 = (f_1)$, $I_2 = (f_2)$ とおく. さらに $I = I_1 I_2 = (f_1 f_2)$ とすると, $\mathbf{F}_S$ の座標環は $\mathbb{R}[S] = \mathbb{R}[X,Y]/I$ と書ける. 以下, $\mathbf{F}_S$ が連結でないと仮定して矛盾を導く. 仮定により, $\mathbb{R}[S]$ にはある非自明なベキ等元 e が存在するはずである. 多項式 $g \in \mathbb{R}[X,Y]$ を $e = g + I$ となるようにとる. すると $e \neq 0, 1$ および $e(1-e) = 0$ により, $g, 1-g \notin I$ かつ $g(1-g) \in I$ となる. よって, f_1, f_2 はそれぞれ既約多項式であるから, $g \in I_1$ かつ $1-g \in I_2$, または, $g \in I_2$ かつ $1-g \in I_1$, のどちらかが成り立つ. 従って $1 = g + (1-g) \in I_1 + I_2$ を得る. ところが $I_1 + I_2 = (X-2, Y^2+3) \not\ni 1$ だからこれは矛盾である. □

[1] 別の見方としては, $\{0,1\} \subset k$ を代数的集合とみなせばその座標環は $k[\{0,1\}] = k[X]/(X(X-1)) \simeq k \times k$ $(\simeq k^{\{0,1\}})$ なので, 第 4 章の意味で $\{0,1\}$ に由来するアフィンスキームであるともいえる.

今の証明の最後に出てきた $(X-2, Y^2+3)$ は $\mathbb{R}[X,Y]$ の極大イデアルで, $\mathbf{F}_S(\mathbb{C})$ の 2 点 $(2, \pm\sqrt{-3})$ に対応する. つまり, $\mathbb{R}$ 上では分かれていた二つの連結成分が, $\mathbb{C}$ 上では交点 $(2, \pm\sqrt{-3})$ において癒着して一つの連結成分になるわけである. アフィンスキームの連結性を考える上ではこのような潜在的な「点」も考慮に入れる必要があるということがこの例から示唆される. $\mathbf{F}_S$ の位相的性質を調べるために用いる位相空間は, S よりも多くの「点」(例えば極大イデアル $(X-2, Y^2+3)$ に対応する点) を持っていなければならない.

5.4 Spec A

A を可換環とするとき, A の素イデアル全体の集合を $\operatorname{Spec} A$ と書き, これを A の**スペクトル (spectrum)** という. A の部分集合 E に対し, E の零点集合 $V(E)$ を

$$V(E) := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid E \subset P\}$$

により定義する. I を E で生成される A のイデアルとすれば $V(E) = V(I)$ となるので, イデアルの零点集合のみを考えれば十分である.

さて, I, J および I_α たちを A のイデアルとするとき,

(i) $V(0) = \operatorname{Spec} A$, $V(1) = \emptyset$,

(ii) $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$,

(iii) $V(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$

が成立するので, $\operatorname{Spec} A$ には $\{V(E) \mid E \subset A\}$ を閉集合族とするある位相が入る. その位相をやはり**ザリスキー位相 (Zariski topology)** という.

なお, $\operatorname{Spec} A$ の閉集合は A の剰余環のスペクトルとみなすことができる. 実際, I を A のイデアルとするとき,

$$V(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} A/I, \quad P \mapsto P/I$$

は同相写像となるので, これにより $\operatorname{Spec} A/I$ は $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(I)$ と同一視される.

命題 5.14 k を体, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (n 変数多項式環) とする. このとき写像

$$\varphi : k^n \to \operatorname{Spec} A, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

は単射かつ連続である. また, $S \subset k^n$ を代数的集合とすると, $\varphi(S)$ の $\operatorname{Spec} A$ における閉包は $V(I(S))$ である. 従って S は $\operatorname{Spec} k[S]$ の稠密な部分集合とみなすことができる.

[証明] $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ は A の極大イデアルとなるので φ は well-defined であり, また明らかに単射である. A の任意のイデアル I に対し,

$$\varphi(a) \in V(I) \Leftrightarrow \varphi(a) \supset I \Leftrightarrow f(a) = 0 \quad ({}^\forall f \in I)$$

だから, $\varphi^{-1}(V(I)) = Z(I)$ を得る. よって φ は連続である. また, $S \subset k^n$ を代数的集合とすると $\varphi(S) \subset V(I) \Leftrightarrow I \subset I(S) \Rightarrow V(I) \supset V(I(S))$ となるので, $\varphi(S)$ の閉包が $V(I(S))$ であることが分かる. $\square$

系 5.15 k を体, $S \subset k^n$ を代数的集合とする.
(a) S が既約 $\Leftrightarrow \operatorname{Spec} k[S]$ が既約.
(b) S が連結 $\Rightarrow \operatorname{Spec} k[S]$ が連結. (逆は一般には成立しない.)

命題 5.14 で点 $p \in k^n$ に対応する極大イデアルを $P = \varphi(p)$ とすると, 多項式 $f \in A$ の p における値 $f(p)$ をとる操作というのは, 標準全射 $A \twoheadrightarrow A/P \simeq k$ による f の像をとるのと同じことである. 一般の可換環 A についてこれを拡張して, 直感的に A の元を $\operatorname{Spec} A$ 上の「関数」とみなすこともできる. この場合, $f \in A$ の $P \in \operatorname{Spec} A$ における値 $f(P)$ とは標準全射 $A \twoheadrightarrow A/P$ による f の像を意味する. ここで, もしすべての点 $P \in \operatorname{Spec} A$ で $f(P) = 0$ となるなら, f は A のベキ零元であることが次の補題から分かる:

補題 5.16 A のイデアル I について $\displaystyle\bigcap_{P \in V(I)} P = \sqrt{I}$. とくに, $\displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{0}$.

[証明] 必要なら A を A/I におきかえて, $I = 0$ の場合に示せば十分である. まず $\sqrt{0} \subset \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$ は明らか. 次に, $A \ni {}^\forall a \notin \sqrt{0}$ に対し, $S_a = \{1, a, a^2, a^3, \cdots\}$, $A_a = S_a^{-1}A$ とおく. 仮定より $(1/1 \neq 0/1$ なので$)$ A_a は零環ではない. とくに, 少なくとも一つは A_a に素イデアルが存在する. それを Q とし, A の素イデアル P を $P = \{b \in A \mid b/1 \in Q\}$ により定めると, $P \cap S_a = \emptyset$, とくに $a \notin P$ である. よって, $A \setminus \sqrt{0} \subset A \setminus \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$. すなわち $\sqrt{0} \supset \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$ を得る. $\square$

系 5.17 A のイデアル I, J について,

$$V(I) \subset V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} \supset \sqrt{J}.$$

とくに, $V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$.

定理 5.18 A を可換環とする.
(a) $\operatorname{Spec} A$ が既約 $\Leftrightarrow$ ベキ零根基 $\sqrt{0}$ が素イデアル $\Leftrightarrow A/\sqrt{0}$ が整域.
(b) A がネーター環のとき, $\operatorname{Spec} A$ は有限個の極大既約閉部分集合たちの和集合で表される.

[証明] (a) $\operatorname{Spec} A$ が既約でないとすると, ある A のイデアル I_1, I_2 があって, $\operatorname{Spec} A = V(I_1) \cup V(I_2)$ かつ $V(I_1), V(I_2) \subsetneq \operatorname{Spec} A$ (つまり $\sqrt{I_1}, \sqrt{I_2} \supsetneq \sqrt{0}$) となる. そこで, $f_1 \in \sqrt{I_1}$, $f_2 \in \sqrt{I_2}$ を $f_1, f_2 \notin \sqrt{0}$ となるようにとれば $f_1 \in P$ ($^\forall P \in V(I_1)$), $f_2 \in Q$ ($^\forall Q \in V(I_2)$) だから, $f_1 f_2 \in \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{0}$ となって, $A/\sqrt{0}$ が整域でないことが分かる.

逆に, $A/\sqrt{0}$ が整域でないとすると, ある $f_1, f_2 \in A \setminus \sqrt{0}$ があって $f_1 f_2 \in \sqrt{0} = \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$ となる. このとき $\operatorname{Spec} A = V(f_1) \cup V(f_2)$ かつ $V(f_1), V(f_2) \subsetneq \operatorname{Spec} A$ となるので $\operatorname{Spec} A$ は既約でない.

(b) は定理 5.7 と全く同様. □

系 5.19 V を $\operatorname{Spec} A$ の既約閉部分集合とすると, これに対してある $P \in \operatorname{Spec} A$ が一意的に存在して $V = V(P) = \overline{\{P\}}$ (一点 P のザリスキー閉包) となる. このような点 P を V の**生成点** (**generic point**) と呼ぶ.

[証明] $V = V(I)$ となる A のイデアル I をとると, 上の定理の (a) により $\sqrt{I}$ は素イデアルとなる. このとき $P = \sqrt{I}$ が求める条件を満たす. □

5.5 連結性の代数的意味

定理 5.20 A を可換環とするとき, A のベキ等元全体と $\operatorname{Spec} A$ の開閉集合全体とは $e \mapsto V(e)$ により双射的に対応する.

[証明] (well-definedness) $A \ni e$ をベキ等元とすると, $e(1-e) = 0$ だから, 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ に対し $e \in P$ または $1 - e \in P$ のどちらか一方が成立する. 一方, $e + (1-e) = 1 \notin P$ だから e と $1 - e$ を両方含む素イデアルは存在しない. よって, $\operatorname{Spec} A = V(e) \cup V(1-e)$ かつ $V(e) \cap V(1-e) = \emptyset$. 従って $V(e)$ は開閉集合となる.

($e \mapsto V(e)$ の単射性) $A \ni e, f$ をベキ等元, $V(e) = V(f)$ とする. $V(f(1-e)) = V(f) \cup V(1-e) = V(e) \cup V(1-e) = \operatorname{Spec} A$ より, $f(1-e) \in \displaystyle\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{0}$. すなわち, $f(1-e)$ はベキ零元となる. しかるに $f(1-e)$ はベキ等元でもあるので, $f(1-e) = 0$ を得る. よって $f = ef$. また, e と f を入れ替えて同様に議論すれば $e = ef$ を得るので, 結局 $e = f$ であることがわかる.

($e \mapsto V(e)$ の全射性) C を $\operatorname{Spec} A$ の任意の開閉集合とする. このとき, ある A のイデアル I, J があって $C = V(I)$, $(\operatorname{Spec} A) \setminus C = V(J)$ となる. $V(I+J) = V(I) \cap V(J) = \emptyset$ より, $I + J$ を含む極大イデアルは存在しないので, $I + J = A$. よって, ある $b \in I$, $c \in J$ があって $b + c = 1$ となる. また, $V(IJ) = V(I) \cup V(J) = \operatorname{Spec} A$ により

$IJ \subset \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{0}$ だから, bc はベキ零元である. $(bc)^n = 0$ となる自然数 n をとる. もし b^n, c^n を両方含んでいる素イデアルがあるとすると, それは b, c を両方含んでしまい, 従って 1 を含んでしまうことになるから, そのような素イデアルは存在しない. よって $Ab^n + Ac^n = A$. すなわち, ある $u, v \in A$ が存在して $ub^n + vc^n = 1$ となる. このとき $ub^n = ub^n(ub^n + vc^n) = (ub^n)^2 + uv(bc)^n = (ub^n)^2$ より, ub^n がベキ等元であることがわかる. 一方, $V(ub^n) \supset V(I)$, $V(vc^n) \supset V(J)$ かつ $V(ub^n) \cap V(vc^n) = \emptyset$ より $V(ub^n) = V(I) = C$ を得る. ゆえに, $\operatorname{Spec} A$ の任意の開閉集合はあるベキ等元 e により $V(e)$ と表すことができる. □

この定理により, アフィンスキーム $\mathbf{F}$ の (定義 5.13 の意味での) 連結性と $\operatorname{Spec} k[\mathbf{F}]$ の連結性とが同値であることが分かる.

系 5.21 $\operatorname{Spec} A$ が連結 $\Leftrightarrow$ A が非自明なベキ等元を持たない.

系 5.22 A がネーター環のとき, $\operatorname{Spec} A$ は有限個の連結成分しかもたず, またそれぞれの連結成分はいくつかの既約成分の和集合である. 特に, $\operatorname{Spec} A$ の開閉集合はいくつかの連結成分の和集合となるので, 高々有限個しかない. 言い換えれば A は高々有限個のベキ等元しかもたない.

[証明] 定理 5.18 (b) を使って, 系 5.10 と同様にして示すことができる. □

系 5.23 A が体 k 上の有限生成可換代数であったとする. このとき A の極大イデアル全体の集合を $\operatorname{Max} A$ ($\subset \operatorname{Spec} A$) と書けば,

$$\operatorname{Spec} A \text{ が 連結} \Leftrightarrow \operatorname{Max} A \text{ が連結}.$$

[証明] ヒルベルトの零点定理 (例えば Waterhouse の本の Appendix, A.8 を参照) により

$$\sqrt{0} = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \bigcap_{M \in \operatorname{Max} A} M.$$

よって, 定理 5.20 と同様にして $\{A \ni e \ \text{ ベキ等元}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\operatorname{Max} A \supset C \ \text{ 開閉集合}\}$ という対応を得る. □

系 5.24 k を代数閉体, $k^n \supset S$ を代数的集合とする. このとき,

$$S \text{ が連結} \Leftrightarrow \operatorname{Spec} k[S] \text{ が連結}.$$

[証明] k が代数閉体のときはヒルベルトの零点定理により $S \simeq \operatorname{Max} k[S]$ となるので, 上記の系により主張が従う. □