

## 線形表現と余加群

天野勝利

2013 年 5 月 22 日 ~ 6 月 5 日

### 参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます. この資料は本の Ch. 3 にあたる部分の講義ノートです.

### 3.1 線形表現

$k$  を可換環とし, 基礎環として固定する (ただし, 3.3 節以降はずっと  $k$  を体と仮定する).  $V$  を  $k$ -加群とすると, アフィン群スキームの  $V$  上の線形表現を下記のように定義する.

まず,  $\mathrm{GL}_V$  という群関手を

$$\mathrm{GL}_V : R \mapsto \{V \otimes_k R \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R \text{ } R\text{-加群同型}\} \quad (\text{積は写像の合成})$$

により定める. 射の対応は,  $k$ -代数射  $\varphi : R \rightarrow S$  に対し,  $\mathrm{GL}_V(\varphi) : \mathrm{GL}_V(R) \rightarrow \mathrm{GL}_V(S)$  を,  $h \in \mathrm{GL}_V(R)$  に対し

$$\mathrm{GL}_V(\varphi)(h) : V \otimes_k S \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R \otimes_R \varphi S \xrightarrow[h \otimes \mathrm{id}_S]{\sim} V \otimes_k R \otimes_R \varphi S \xrightarrow{\sim} V \otimes_k S$$

( $\varphi S$  は  $\varphi$  を介して  $S$  を  $R$ -加群とみなしたもの) とすることにより定める. ここで,  $h \in \mathrm{GL}_V(R)$  は  $V$  への制限  $h|_V : V \rightarrow V \otimes_k R, v \mapsto h(v \otimes 1)$  により完全に定まっており, 単にこれを  $R$ -線形になるように拡張したものにすぎないことに注意しておく.  $\mathrm{GL}_V(\varphi)(h)$  も  $(\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ h|_V : V \rightarrow V \otimes_k S$  を  $S$ -線形になるように拡張したものにすぎない.

定義 3.1  $G$  を  $k$  上のアフィン群スキーム,  $V$  を  $k$ -加群とすると,  $G$  から  $\mathrm{GL}_V$  への (群関手としての) 準同型を  $G$  の  $V$  上の線形表現 (linear representation) と呼ぶ.

### 3.2 余加群

定義 3.2  $A$  を  $k$ -ホップ代数,  $V$  を  $k$ -加群とする.  $k$ -加群準同型  $\rho: V \rightarrow V \otimes_k A$  で次の二つの可換図式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes_k A \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \otimes \text{id} \\ V \otimes_k A & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & V \otimes_k A \otimes_k A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes_k A \\ \sim \searrow & & \swarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\ & V \otimes_k k & \end{array}$$

を満たすものを  $V$  上の右  $A$ -余加群構造 (right  $A$ -comodule structure) と呼ぶ. またこのとき  $(V, \rho)$  を右  $A$ -余加群 (right  $A$ -comodule) と呼ぶ.

ホップ代数の余積と同様に, 余加群構造にも次のような  $\Sigma$  記法が用いられている:

$$\rho(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \in V \otimes_k A.$$

( $V$  に含まれる部分が必ず 0 番になるように番号をつける.) この記法で上記の二つの可換図式の条件を書いてみると,

$$\sum \rho(v_{(0)}) \otimes v_{(1)} = \sum v_{(0)} \otimes \Delta(v_{(1)}) \quad (= \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)} \text{ と書く}), \quad \sum v_{(0)} \varepsilon(v_{(1)}) = v$$

( $\forall v \in V$ ) となる.

定理 3.3  $G$  を  $k$  上のアフィン群スキーム,  $A = k[G]$  とする.  $V$  を  $k$ -加群とすると,  $G$  の  $V$  上の線形表現と  $V$  の右  $A$ -余加群構造とは次のように双射的に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \{\Phi: G \rightarrow \text{GL}_V \text{ 線形表現} \} & \xleftarrow{1:1} & \{\rho: V \rightarrow V \otimes_k A \text{ 右 } A\text{-余加群構造} \} \\ \Phi & \mapsto & \Phi_A(\text{id}_A)|_V. \end{array}$$

逆写像は  $\rho \mapsto [\Phi_R: g \mapsto [v \otimes r \mapsto (\text{id} \otimes g)(\rho(v))r]]$  で与えられる. (ただし, ここでは  $G(R)$  と  $\text{Alg}_k(A, R)$  とを同一視している.)

[証明]  $G = \text{Sp } A$  と仮定してよい.

( $\longrightarrow$ )  $\Phi: G \rightarrow \text{GL}_V$  を線形表現とする.  $\rho' = \Phi_A(\text{id}_A) \in \text{GL}_V(A)$  とし, これを  $V$  に制限したものを  $\rho = \rho'|_V: V \rightarrow V \otimes_k A$  とおく.

$\Phi$  は関手間射なので, 任意の  $R \in {}_k\mathcal{A}$  と  $g \in G(R) = \text{Alg}_k(A, R)$  に対し

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{\Phi_A} & \text{GL}_V(A) \\ G(g) \downarrow & & \downarrow \text{GL}_V(g) \\ G(R) & \xrightarrow{\Phi_R} & \text{GL}_V(R) \end{array}$$

は可換である. この図式における  $\text{id}_A \in \mathbf{G}(A)$  の行先を考えれば

$$\Phi_R(g) = \mathbf{GL}_V(g)(\Phi_A(\text{id}_A)) = \mathbf{GL}_V(g)(\rho')$$

を得る. 故に,  $\Phi_R(g)$  は  $(\text{id} \otimes g) \circ \rho : V \rightarrow V \otimes_k R$  を  $R$ -線形になるよう拡張したものに他ならない. すなわち  $\Phi_R$  は

$$\Phi_R : g \mapsto [v \otimes r \mapsto (\text{id} \otimes g)(\rho(v))r]$$

という写像になっている.

次に  $\rho$  が  $V$  上の右  $A$ -余加群構造になることを示す. まず,  $A$  の余単位射  $\varepsilon \in \mathbf{G}(k)$  は  $\mathbf{G}(k)$  の単位元なので,  $\Phi_k(\varepsilon)$  は  $\mathbf{GL}_V(k) = GL(V)$  の単位元, つまり  $V$  の恒等写像でなければならない. 一方, 先程の説明より  $\Phi_k(\varepsilon)$  は  $(\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \rho$  と同じ写像だから,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes_k A \\ \sim \searrow & & \swarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\ & & V \otimes_k k \end{array}$$

の可換性が分かる.

任意の  $R \in {}_k\mathbf{A}$  と  $g, h \in \mathbf{G}(R)$  に対し, 積  $gh = m \circ (g \otimes h) \circ \Delta$  を考えると,  $\Phi_R(gh) = \mathbf{GL}_V(gh)(\rho')$  は  $(\text{id} \otimes gh) \circ \rho$  を  $R$ -線形になるように拡張したものであるから,  $V$  に制限すると

$$\Phi_R(gh)|_V : V \xrightarrow{\rho} V \otimes_k A \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} V \otimes_k A \otimes_k A \xrightarrow{\text{id} \otimes g \otimes h} V \otimes_k R \otimes_k R \xrightarrow{\text{id} \otimes m} V \otimes_k R \quad (3.1)$$

となる. 一方,  $\Phi_R(g), \Phi_R(h)$  はそれぞれ  $(\text{id} \otimes g) \circ \rho, (\text{id} \otimes h) \circ \rho$  を  $R$ -線形になるように拡張したものであるから,  $\Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$  を  $V$  に制限すると

$$\begin{aligned} & (\Phi_R(g) \circ \Phi_R(h))|_V \\ = & (V \xrightarrow{\rho} V \otimes_k A \xrightarrow{\text{id} \otimes h} V \otimes_k R \xrightarrow{\rho \otimes \text{id}} V \otimes_k A \otimes_k R \xrightarrow{\text{id} \otimes g \otimes \text{id}} V \otimes_k R \otimes_k R \xrightarrow{\text{id} \otimes m} V \otimes_k R) \\ = & (V \xrightarrow{\rho} V \otimes_k A \xrightarrow{\rho \otimes \text{id}} V \otimes_k A \otimes_k A \xrightarrow{\text{id} \otimes g \otimes h} V \otimes_k R \otimes_k R \xrightarrow{\text{id} \otimes m} V \otimes_k R) \quad (3.2) \end{aligned}$$

となる.  $\Phi_R$  は群準同型だから  $\Phi_R(gh) = \Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$ , 従って, (3.1) と (3.2) とは一致していなければならない. ここで,  $R = A \otimes_k A, g : a \mapsto a \otimes 1, h : b \mapsto 1 \otimes b$  とすれば  $V \otimes_k A \otimes_k A \xrightarrow{\text{id} \otimes g \otimes h} V \otimes_k R \otimes_k R \xrightarrow{\text{id} \otimes m} V \otimes_k R$  の部分は恒等写像になってしまうので,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes_k A \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \otimes \text{id} \\ V \otimes_k A & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & V \otimes_k A \otimes_k A \end{array}$$

の可換性を得る. 以上より,  $\rho$  が  $V$  上の右  $A$ -余加群構造になることがいえた.

( $\leftarrow$ )  $\rho: V \rightarrow V \otimes_k A$  を右  $A$ -余加群構造とする. この  $\rho$  を右  $A$ -線形になるように拡張したものを  $\rho': V \otimes_k A \rightarrow V \otimes_k A$  とすると, これは  $A$ -加群同型になる (逆写像は  $v \otimes a \mapsto \sum v_{(0)} \otimes S(v_{(1)})a$ ) ので,  $\rho' \in \mathrm{GL}_V(A)$  である. すると, 各  $R \in {}_k\mathcal{A}$  に対し

$$\Phi_R: \mathbf{G}(R) \rightarrow \mathrm{GL}_V(R), \quad g \mapsto \mathrm{GL}_V(g)(\rho')$$

とすることにより  $\Phi: \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_V$  という関手間射が得られる. さて,  $\rho$  は余加群構造だから  $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$  で, 従って, 任意の  $g, h \in \mathbf{G}(R)$  に対して上記の (3.1) と (3.2) とは一致する. よって,  $(\mathrm{GL}_V(R))$  の元はその  $V$  への制限によって完全に定まるのであったから)  $\Phi_R(gh) = \Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$  を得る. 従って  $\Phi$  は群関手の準同型である.  $\square$

例 3.4 上の定理で  $V = A$  とするとき,  $\Delta: A \rightarrow A \otimes_k A$  は右  $A$ -余加群構造になっている. これに対応する線形表現を  $\mathbf{G}$  の正則表現 (regular representation) という.

部分余加群/部分表現.  $\mathbf{G}$  をアフィン群スキーム,  $A = k[\mathbf{G}]$ ,  $(V, \rho)$  を右  $A$ -余加群とし,  $\rho$  に対応する線形表現を  $\Phi: \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_V$  とおく.  $V$  の  $k$ -加群直和因子  $W$  が  $\rho(W) \subset W \otimes_k A$  を満たすとき,  $(W, \rho|_W)$  を  $(V, \rho)$  の部分余加群 (subcomodule) という. なお,  $\rho(W) \subset W \otimes_k A$  という条件は,  $\forall R \in {}_k\mathcal{A}, \forall g \in \mathbf{G}(R)$  に対し  $W \otimes_k R$  が  $\Phi_R(g): V \otimes_k R \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R$  で不変 (i.e.  $\Phi_R(g)(W \otimes_k R) \subset W \otimes_k R$ ) であることと同値である. 部分余加群  $(W, \rho|_W)$  に対応する線形表現  $\mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_W$  は  $g \mapsto \Phi_R(g)|_{W \otimes_k R}$  により与えられる. これは  $\Phi$  の部分表現と呼ばれる.

商余加群/商表現. さらに上の状況で, 商加群  $\bar{V} = V/W$  を考える. もし  $W$  が部分余加群なら,  $V \xrightarrow{\rho} V \otimes_k A \rightarrow \bar{V} \otimes_k A$  が  $\bar{V}$  を経由するので,  $\rho$  から  $\bar{V}$  上の右  $A$ -余加群構造  $\bar{\rho}: \bar{V} \rightarrow \bar{V} \otimes_k A$  が誘導される. この  $(\bar{V}, \bar{\rho})$  を  $(V, \rho)$  の商余加群 (quotient comodule) と呼ぶ. また, それに対応する線形表現  $\mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{\bar{V}}$  を  $\Phi$  の商表現という.

線形表現のテンソル積.  $\Phi_1: \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{V_1}, \Phi_2: \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{V_2}$  をアフィン群スキーム  $\mathbf{G}$  の二つの線形表現とすると, 関手間射  $\Phi_1 \otimes \Phi_2: \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{V_1 \otimes_k V_2}$  を

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2)_R: \mathbf{G}(R) \rightarrow \mathrm{GL}_{V_1 \otimes_k V_2}(R), \quad g \mapsto \Phi_{1,R}(g) \otimes_R \Phi_{2,R}(g) \quad (R \in {}_k\mathcal{A})$$

により定める ( $(V_1 \otimes_k R) \otimes_R (V_2 \otimes_k R) \simeq V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k R$  に注意) と, これは  $\mathbf{G}$  の  $V_1 \otimes_k V_2$  上の線形表現となる. この  $\Phi_1 \otimes \Phi_2$  を  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  のテンソル積 (表現) と呼ぶ.  $\Phi_1, \Phi_2$  に対応する余加群構造を  $\rho_1, \rho_2$  とおくと,  $\Phi_1 \otimes \Phi_2$  に対応する余加群構造は

$$\rho_1 \otimes_A \rho_2: V_1 \otimes_k V_2 \rightarrow V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k A, \quad v \otimes v' \mapsto \sum v_{(0)} \otimes v'_{(0)} \otimes v_{(1)} v'_{(1)}$$

で与えられる.

線形表現の双対. 定理 3.3 の状況で, 線形表現  $\Phi$  と余加群構造  $\rho$  とが対応しているとする. ここで  $V$  は  $k$ -加群として有限生成かつ射影的であったと仮定し, 双対加群  $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$  を考える. 関手間射  $\Phi^\vee : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{V^*}$  を,  $R \in {}_k\mathcal{A}$  に対し

$$\Phi_R^\vee : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{V^*}, \quad g \mapsto \Phi_R(g^{-1})^* \quad (\Phi_R(g^{-1}) \text{ の } R\text{-加群双対})$$

とすることにより定めると, これは  $\mathbf{G}$  の  $V^*$  上の線形表現となる. この  $\Phi^\vee$  を  $\Phi$  の双対 (表現) と呼ぶ. これに対応する余加群構造は

$$\begin{aligned} \rho^\vee : V^* &\rightarrow \text{Hom}_k(V, A) && \xrightarrow{\sim} V^* \otimes_k A \\ f &\mapsto [v \mapsto \sum f(v_{(0)})S(v_{(1)})] \end{aligned}$$

で与えられる.

演習 3.5 上記の 4 つのパラグラフに書いてあることを確かめよ.

それから,  $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$  を二つの余加群とすると, 直和  $(V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$  も自然に余加群となる ( $(V_1 \otimes_k R) \oplus (V_2 \otimes_k R) \simeq (V_1 \oplus V_2) \otimes_k R$  に注意). また, ある余加群  $V$  の二つの部分余加群があるとき, その二つの和も自然に  $V$  の部分余加群となる.

$\mathbf{GL}_V$  と  $\mathbf{GL}_n$ . ここで  $V$  が階数  $n (< \infty)$  の自由  $k$ -加群であった場合を考えよう.  $V$  の基底を一組選んでおき, それを  $\{v_1, \dots, v_n\}$  とする. また,  $H = k[X, 1/\det X]$  ( $X = (X_{ij})_{i,j}$ ) を  $\mathbf{GL}_n$  の座標環とする. このとき同型  $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$  が次のようにして構成できる: 各  $R \in {}_k\mathcal{A}$  に対し,

$$\begin{aligned} \text{Alg}_k(H, R) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_n(R) && \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V(R) \\ g &\mapsto g(X) = (g(X_{ij}))_{i,j} && \mapsto [\sum_{j=1}^n v_j \otimes r_j \mapsto \sum_{i,j=1}^n v_i \otimes g(X_{ij})r_j]. \end{aligned}$$

一番右は要するに,  $R$  成分の  $n$  項縦ベクトルに  $g(X)$  を左からかける作用と同じで,

$$(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto (v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)(1 \otimes g(X)) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

とも書ける. この同型  $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$  を  $\mathbf{GL}_n$  の  $V$  上の線形表現とみたときに, これに対応する  $V$  の右  $H$ -余加群構造を  $\rho_0$  と書くことにする:

$$\rho_0 : V \rightarrow V \otimes_k H, \quad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes X_{ij} \quad (j = 1, \dots, n).$$

さて,  $G$  をアフィン群スキーム,  $A = k[G]$  とするとき,  $G$  の  $V$  上の任意の線形表現  $\Phi: G \rightarrow GL_V$  は必ず  $GL_n$  を経由する. つまり, ある準同型  $\Psi: G \rightarrow GL_n$  があって,  $\Phi: G \xrightarrow{\Psi} GL_n \xrightarrow{\sim} GL_V$  と書ける. この  $\Psi$  に対応するホップ代数射を  $\psi: H \rightarrow A$  とすると,  $\Phi$  に対応する  $V$  の右  $A$ -余加群構造は

$$V \xrightarrow{\rho_0} V \otimes H \xrightarrow{\text{id} \otimes \psi} V \otimes A, \quad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes \psi(X_{ij}) \quad (j = 1, \dots, n)$$

と書ける.  $\Delta(\psi(X_{ij})) = \sum_{s=1}^n \psi(X_{is}) \otimes \psi(X_{sj})$  だから, 以上により次が言えたことになる:

**補題 3.6**  $G$  をアフィン群スキーム,  $A = k[G]$ ,  $V$  を  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を基底とする階数  $n$  ( $< \infty$ ) の自由  $k$ -加群とし,  $V$  に右  $A$ -余加群構造  $\rho: V \rightarrow V \otimes A$  が与えられているとする. このとき  $\rho(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) となる  $a_{ij} \in A$  をとれば,

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_{s=1}^n a_{is} \otimes a_{sj} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

が成立する. また  $\det(a_{ij})_{i,j}$  は  $A$  の可逆元である.

### 3.3 有限性定理

この節から以下はずっと  $k$  は体であると仮定する.

**定理 3.7**  $A$  を可換  $k$ -ホップ代数,  $(V, \rho)$  を右  $A$ -余加群とする. このとき  $V$  は  $k$  上有限次元な部分余加群たちの有向和集合 (directed union) になっている. すなわち, ある有向集合  $\Lambda$  により添え字づけられた  $k$  上有限次元な  $V$  の部分余加群の族  $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$  で  $i < j \Rightarrow V_i \subset V_j$  なるものがあって,  $V = \bigcup_{i \in \Lambda} V_i$  と書ける.

[略証] 任意の  $v \in V$  に対し,  $v$  を含む  $k$  上有限次元な部分余加群が必ず存在することを示せばよい.  $\{a_i\}$  を  $A$  の  $k$ -基底とし,

$$\rho(v) = \sum_i v_i \otimes a_i \quad (\text{有限個の } i \text{ を除き } v_i = 0)$$

と書く. このとき  $V' = \text{Span}_k\{v, v_i\}$  ( $v$  と  $v_i$  たちで生成される  $V$  の  $k$ -部分空間) が求める部分余加群となる. □

**定理 3.8** 任意の可換  $k$ -ホップ代数  $A$  は,  $k$  上有限生成な部分ホップ代数たちの有向和集合である.

[略証] 右  $A$ -余加群  $(A, \Delta)$  の任意の有限次元部分余加群  $V \subset A$  が, ある  $k$  上有限生成な部分ホップ代数に含まれることを示せばよい.  $\{v_i\}$  を  $V$  の基底とし,  $\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$  となるような  $a_{ij} \in A$  をとる. このとき  $v_i, a_{ij}, S(v_i), S(a_{ij})$  たちで生成される  $A$  の  $k$ -部分代数は部分ホップ代数となる.  $\square$

この定理を言い換えると, 次のようになる:

系 3.9 体  $k$  上のアフィン群スキームは, 常に代数的アフィン群スキームたちの逆極限 (射影極限) である.

### 3.4 代数的なら $\mathrm{GL}_n$ の閉部分群に帰着すること

定理 3.10  $G$  を体  $k$  上の代数的アフィン群スキームとするとき, ある閉埋め込み  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$  ( $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) が存在する.

[証明]  $A = k[G]$  とすると  $A$  は  $k$  上有限生成なホップ代数なので, 定理 3.7 により, ある有限次元部分余加群  $V \subset A$  で  $k[V] = A$  を満たすものがある.  $n = \dim_k V$  とし,  $\mathrm{GL}_n$  の座標環  $k[X, 1/\det X]$  ( $X = (X_{ij})_{i,j}$ ) をとる.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $V$  の基底とし,  $\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) となる  $a_{ij}$  をとれば, 補題 3.6 により

$$k[X, 1/\det X] \rightarrow A, \quad X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

はホップ代数射である. 後はこれが全射であることを示せばよいが, それは  $v_j = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(v_j)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(v_i) a_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) により従う.  $\square$

例 3.11 上記の定理の証明に沿って  $G_a$  の  $\mathrm{GL}_2$  への閉埋め込みを構成する.  $G_a$  の座標環を  $k[Y]$  ( $Y$  は原始元) とする.  $V = k + kY$  とすれば, これは 2 次元の部分余加群で  $k[V] = k[Y]$  を満たす.  $V$  の基底として  $v_1 = 1, v_2 = Y$  をとれば,

$$\Delta(v_1, v_2) = (1 \otimes 1, 1 \otimes Y + Y \otimes 1) = (v_1 \otimes 1, v_2 \otimes 1) \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 1 \otimes Y \\ 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix}$$

だから,  $\mathrm{GL}_2$  の座標環  $k[X, 1/\det X]$  からのホップ代数射

$$\varphi : k[X, 1/\det X] \rightarrow k[Y], \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る.  $\varphi$  に対応する準同型を  $\Phi : G_a \rightarrow \mathrm{GL}_2$  とすると, 各  $R \in {}_k\mathcal{A}$  に対して  $\Phi_R$  は

$$\Phi_R : G_a(R) \rightarrow \mathrm{GL}_2(R), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という群準同型である.

### 3.5 すべての有限次元線形表現を $k^n$ から構成する

定義 3.12  $A$  を可換  $k$ -ホップ代数,  $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$  を右  $A$ -余加群とする.  $k$ -線形写像  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  が  $A$ -余加群射 ( $A$ -comodule map) であるとは, 次の可換図式を満たすことをいう:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ V_1 \otimes_k A & \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} & V_2 \otimes_k A. \end{array}$$

余加群射  $\varphi$  が全単射であれば, 余加群同型 (comodule isomorphism) といい,  $V_1$  と  $V_2$  は余加群として同型であるという.

補題 3.13  $A$  を可換  $k$ -ホップ代数,  $(V, \rho)$  を  $k$  上有限次元な右  $A$ -余加群,  $n = \dim_k V$  とする. このとき, ある単射  $A$ -余加群射  $V \hookrightarrow A^n$  が存在する (ここで,  $A^n$  の余加群構造は  $(A, \Delta)$  の  $n$  個の直和としてのもの).

[略証]  $(V \otimes_k A, \text{id}_V \otimes \Delta)$  は  $A^n$  と同型な余加群であり,  $\rho: V \rightarrow V \otimes_k A$  は単射  $A$ -余加群射となる.  $\square$

定理 3.14  $G$  を  $\text{GL}_n$  の閉部分群スキーム,  $A = k[G]$  とする. このとき  $G$  の  $k^n$  上の線形表現  $\Phi: G \hookrightarrow \text{GL}_n \xrightarrow{\sim} \text{GL}_{k^n}$  が自然に存在する.  $G$  のすべての有限次元線形表現は,  $\Phi$  から, テンソル積, 直和, 部分表現, 商表現, 双対, をとる操作を有限回行うことにより構成できる.

[証明] 上の補題により,  $(A, \Delta)$  の有限個の直和  $A^m$  の任意の有限次元部分余加群  $V$  について主張が成り立てばよい. さらに,  $V$  は  $A^m$  から  $A$  への  $m$  個の射影による  $V$  の像たちの直和と同型だから, 結局  $(A, \Delta)$  の任意の有限次元部分余加群 (これを改めて  $V$  とおく) が構成可能であればよい.

$B = k[\text{GL}_n] = k[X, 1/\det X]$  ( $X = (X_{ij})_{i,j}$ ) とおくと,

$$B = \bigcup_{r,s} B_{r,s}, \quad B_{r,s} = \frac{1}{(\det X)^r} \{f \in k[X] \mid \deg f \leq s\}$$

と書ける. この  $B_{r,s}$  たちは右  $B$ -余加群  $(B, \Delta)$  の有限次元部分余加群である.  $V$  はある  $B_{r,s}$  の  $B \rightarrow A$  ( $G \hookrightarrow \text{GL}_n$  に対応するホップ代数射) による像に含まれているはずなので, 各  $B_{r,s}$  が右  $B$ -余加群として  $k^n$  から構成されることを示せば証明は完了する.

$\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $k^n$  の標準基底とする. このとき,  $k^n \rightarrow B, v_j \mapsto X_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は単射  $B$ -余加群射なので,

$$H_1 := \{f \in k[X] \mid f \text{ は斉次, } \deg f = 1\} \simeq (k^n)^{\oplus n}$$



となる. また,  $H_s := \{f \in k[X] \mid f \text{ は斉次, } \deg f = s\}$  とおくと, 自然な全射  $B$ -余加群射

$$\underbrace{H_1 \otimes_k \cdots \otimes_k H_1}_s \rightarrow H_s$$

がある. また,  $k \det X \subset H_n$  は 1 次元  $B$ -部分余加群で, その双対は

$$(k \det X)^* \simeq k \frac{1}{\det X}$$

である. そして

$$B_{r,s} \simeq \underbrace{k \frac{1}{\det X} \otimes_k \cdots \otimes_k k \frac{1}{\det X}}_r \otimes_k \left( \bigoplus_{s' \leq s} H_{s'} \right) \quad (\text{ただし } H_0 = k)$$

となるから,  $B_{r,s}$  が  $k^n$  から構成可能であることが示された. □

注意 3.15 上の定理で, もし  $G$  が  $SL_n$  の閉部分群スキームであったなら, 双対は不要である.