# 行列の積に関してよくある勘違い

行列 $A$ と行列 $B$ の積を考えるというときに起こりがちな間違いを挙げてみます.

**• $A$ の列の数と $B$ の行の数が合っていないのに積 $AB$ を考えようとする.**

とくに, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ のような書き方をしている場合 (下記も参照), これは行列の積のつもりで誤って書いているのか, あるいは内積など別の意味でこのように書いているのか, よく分からないことがあります.

**• 行列 $AB$ のサイズが合わない.**

$A$ が $m \times n$ 行列, $B$ が $n \times l$ 行列ならば $AB$ は $m \times l$ 行列にならなければおかしいのですが, 何かを間違えて $m \times l$ 以外のサイズになってしまうことがあります. 計算して $m \times l$ 行列にならなかったとすれば, それはどこかが間違っていることを意味するので, よく見直しましょう (行や列を飛ばしたりしていないか, 等).

**• 成分ごとの掛け算にしてしまう.**

特に, 正方行列のベキ積 $A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n}$ をこのように計算してしまうという間違いが多いように思えます:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \qquad (\leftarrow \text{間違い})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & db+d^2 \end{pmatrix} \qquad (\leftarrow \text{正しくはこう})$$

他に多いのが, 2 つの $n$ 項ベクトルの「積」を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ b_n b_n \end{pmatrix} \qquad (\leftarrow \text{!?})$$

のように計算する場合です. これは行列の積としては意味を持ちません. ただ, 物理学の本などで, ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ があるときに, $\boldsymbol{ab}$ と書いて上記のように成分ごとをかけあわせたベクトルを表すこともあるようです.

ベクトルの内積を上記のように計算してしまうという間違いもよくあるようです. 基本的なことですが, **内積はスカラーです**:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

内積を表す場合は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ のように中点を使うか, カッコを付けて $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のように表すなどした方が誤解が少ないでしょう.

二つのベクトルの「積」にはいくつか種類があるので, どの「積」を考えているのかは記号や文脈で判断するしかありません. この例に限らず, 皆さんがレポートなどを書くときには, 読み手に誤解を与えないように結構気を使う必要があります.

**・普通の数の計算と同様に次が成立すると思いこんでしまう.**

(1) $AB = BA$

(2) $AB = O \Rightarrow A = O$ または $B = O$

どちらも一般には正しくありません. 反例を作ってみれば分かるので, これは演習問題にしましょう.

**補足: 行列の積をあのように定義する理由.** 一言でいえば, あの定義は 1 次変換の合成からきています.

例えば $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ を表現行列とする 2 つの 1 次変換

$$\begin{aligned} f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\ g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考えてみます. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $g$ を施した後で $f$ を施すと,

$$\boldsymbol{x} \overset{g}{\mapsto} B\boldsymbol{x} \overset{f}{\mapsto} A(B\boldsymbol{x})$$

となりますが, これをまとめてひとつの 1 次変換とみたものを $f$ と $g$ の合成といいます[1]. 行先を実際に計算してみましょう:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} \\ &\overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{12}(b_{21}x + b_{22}y) \\ a_{21}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{22}(b_{21}x + b_{22}y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1]記号 $f \circ g$ で表します. 教科書の 3.6 節 (第 3 章付録) を参照.

$$
= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

これの表現行列が積 $AB$ になるように, 行列の積を定義したかったわけです:

$$
AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.
$$

端的にいえば, $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ が成り立つように $AB$ を定義したかった, ということです.

正方行列でない行列の積についても同様です. 例えば, $2\times3$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ と $3 \times 2$ 行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ を表現行列とする 2 つの変換

$$
f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

$$
g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

を考えて,「$g$ を施した後 $f$ を施す」という合成を考えてみてください. 実際に計算してみれば, ちゃんと表現行列が積 $AB$ の定義と一致するはずです.

また,「なぜ $A$ の列の数と $B$ の行の数が同じでなければならないか」ということも 1 次変換を念頭におけば納得がいくと思います. 上記の $f$ は「3 次元空間から 2 次元空間への 1 次変換」で, $g$ は「2 次元空間から 3 次元空間への 1 次変換」ですね. 途中で経由する 3 次元空間の次元が合っているので, 2 次元空間 → 3 次元空間 → 2 次元空間, という合成ができるというわけです.