

10 固有値・固有ベクトル

演習 10.1 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ (複素数の範囲で).

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

演習 10.2 A を正方行列とする.

(1) A の固有値と tA の固有値は一致することを示せ.

(2) A が正則行列のとき, r を A の固有値とすると, $r \neq 0$ であり, $1/r$ は A^{-1} の固有値であることを示せ.

[ヒント] (1) 固有多項式が一致すれば固有値も一致する.

(2) r が A の固有値 \Leftrightarrow あるベクトル $v (\neq 0)$ が存在して $Av = rv$.

演習 10.3 A を n 次の正方行列とするととき, 次の (a), (b) が同値であることを示せ.

(a) $A^n = O$,

(b) A の固有値は 0 のみである.

[ヒント] ((a) \Rightarrow (b)) $v (\neq 0)$ を A の固有値 r に関する固有ベクトルとすると $Av = rv$, $A^2v = r^2v, \dots$

((a) \Leftarrow (b)) A の固有多項式が何になるかを考える.