6 連立 1 次方程式

$x_1, \dots, x_n$ を未知変数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は, 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

を用いれば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける. もし $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならばこの方程式は**斉次**, そうでないときは**非斉次**という.

もし行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ に何か行基本変形を施して $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ になったならば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ だから, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解と $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解は一致する. そこで, $(A \mid \boldsymbol{b})$ を行変形により解きやすい形 (簡約階段行列) にすれば, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めることができる.

斉次の場合. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 少なくとも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は解 (これを**自明な解**という) なので,「解なし」ということはない. $(A \mid \boldsymbol{b})$ の一番右の列が $\boldsymbol{0}$ で, それは行変形で変わらないから, 単に A を簡約階段行列にすることを考えれば良い. さて, A が行変形により簡約階段行列 A' になったとする. そのとき方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考えてみる. 未知変数のうち A' の各階段の左端の列にあたる部分に対応するものを $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ $(r = \operatorname{rank} A)$ とすれば, 方程式が

$$\begin{cases} x_{i_1} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \text{ 以外の変数による 1 次式}) \\ \vdots \\ x_{i_r} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \text{ 以外の変数による 1 次式}) \end{cases}$$

という形に変形できることが分かる. すると, $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ 以外の各変数に任意の定数をあてはめて, それらに対して上の式により $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ を定めれば, 方程式のすべての解が得られることになる. この任意に決められる変数の数を**解の自由度**と呼ぶ. つまり, 解の自由度は未知変数の数 (= A の列の数) から A の階数を引いた $n - r$ となる.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_2$ を二つの解とすると, $A\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$ だから, 任意の定数 c_1, c_2 に対し

$$A(c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) = c_1A\boldsymbol{y}_1 + c_2A\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$$

となり, 線形結合 $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2$ も解になる. 解の自由度が $n-r$ であることから, 斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はある $n-r$ 個の線形独立な解の組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ をもち, 一般解は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける (ただし, $r = n$ のときは解は自明な解のみ). このような $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という.

演習 6.1 次の斉次連立 1 次方程式の基本解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

斉次とは限らない場合. 一般の ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とは限らない) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. $(A \mid \boldsymbol{b})$ が行変形により簡約階段行列 $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ になったとしよう. このときもし $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) > \mathrm{rank}\,A$ ならば, 方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の中に“ $0 = 1$” という行が含まれるはずで, これは不可能なので, もとの方程式は「解なし」となる. そうでない場合 (つまり $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,A$ の場合) は必ず解が存在する.

さて, 右辺を $\boldsymbol{0}$ にした斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ($\Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) の基本解ともとの方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ($\Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$) の一般解には次のような関係がある. まず, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ ($r = \mathrm{rank}\,A$) とする. もし $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するなら, そのうちの一つを $\boldsymbol{g}$ とすると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} + c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける.

例えば $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を変形して

$$\begin{cases} x_{i_1} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} \text{ 以外の変数による 1 次式})+(\text{定数項}) \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ x_{i_r} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} \text{ 以外の変数による 1 次式})+(\text{定数項}) \end{cases}$$

のようになったとするとき, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ 以外の変数に 0 を当てはめた時に残る定数項の部分を $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ に当てはめれば一つの解が得られるので, それを $\boldsymbol{g}$ とすればよい.

演習 6.2 次の (x_1, x_2, x_3 に関する) 連立 1 次方程式に解が存在するための定数 a の条件を求めよ. またそのときの解 (一意に決まらなければ一般解) を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$

演習 6.3 次の連立 1 次方程式に解が存在するかどうかを調べ, 解が存在する時は一般解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 3 \\ 7x_1 + 5x_2 + 13x_4 = 15 \end{cases}$

連立 1 次方程式の解全体を幾何的にみた場合, 自由度というのは解全体がなす図形の次元 (解が動ける次元) を表している (このことを理解するために, 次のような問題をやってみてください).

演習 6.4 xyz 空間座標に関する方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

で与えられる三つの平面が, (1) ちょうど一点を共有するための条件, (2) ちょうど一本の直線を共有するための条件, (3) 一つも共有点をもたないための条件, をそれぞれ行列を用いて述べよ.