

## 5 簡約階段行列・掃き出し法

演習 5.1 次の行列に行基本変形を何回か施して簡約階段行列にせよ. また, その結果を見て各行列の階数を答えよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

演習 5.2 ある正方行列  $A$  に行基本変形を何回か施して正方行列  $B$  になったとする. もし  $B$  が正則行列ならば  $A$  も正則であることを示せ.

特に, 正方行列  $A$  に行基本変形を何回か施して簡約階段行列にしたときに, もし結果が単位行列なら  $A$  は正則である. 逆に,  $A$  が正則なら行基本変形によって必ず単位行列にできる. また,  $A$  が正則である場合,  $A$  と単位行列  $E$  を並べた行列  $(A | E)$  に行基本変形を何回か施して行列  $(E | A')$  になるならば  $A' = A^{-1}$  である. このことを利用すれば逆行列を計算することができる.

演習 5.3 次の行列が正則行列かどうかを調べ, もし正則ならば逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$