3 線形独立・線形従属

演習 3.1 次で与えられる 3 項縦ベクトル (空間ベクトル) の組が ($\mathbb{R}$ 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ (証明をつけること).

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のどちらかとし, 以下 K 上で考える.

演習 3.2 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうちどの 2 つも線形独立になることを示せ.
(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立か線形従属かを述べよ.

線形従属性について, 次の 2 つの条件を考えてみます:

(a) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属.
(b) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ のうち, ある $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ $(i \neq j)$ について $\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j$ (c : 定数) と書ける.

実はこれらは異なる条件なのですが, 両者を混同する人がかなりいるみたいなので気をつけてください.

演習 3.3 3 項ベクトルの組で, 上記の (a) が成り立つが (b) は成り立たないような例を挙げよ.

ただ, (a) と次の (a') は同値な条件となります:

(a') ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して, $\boldsymbol{a}_i$ が $\boldsymbol{a}_i$ 以外の他のベクトルたちの線形結合で表せる (つまり, $\boldsymbol{a}_i$ が他の $m-1$ 個のベクトルたちで生成される空間に属している). 言い換えれば, ある定数 $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in K$ が存在して,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

と表せる.