2 数ベクトルの線形結合 (一次結合)

実数成分の 3 項縦ベクトル全体を $\mathbb{R}^3$ と書くことにする.

演習 2.1 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について考える.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合で表せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合で表されることを示せ.

演習 2.2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間について, 次を証明せよ.

(1) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(3) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$