1　行列の基本演算

演習 1.1 次の等式が成り立つように x, y, z の値を定めよ.

(1) $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & z \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x & -1 \\ -3 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \\ z & 12 \end{pmatrix}$

演習 1.2 (行列の積の結合法則) (1) A, B, C を 2×2 の正方行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

(2) A を 3×2 行列, B を 2×2 行列, C を 2×4 行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

(3) 一般に, A を $m\times n$ 行列, B を $n\times l$ 行列, C を $l\times r$ 行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

演習 1.3 (行列の分配法則) (1) A, B, C, D を 2×2 の正方行列とするとき, $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

(2) A を 3×2 行列, B, C を 2×4 行列, D を 4×2 行列とするとき, $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

(3) 一般に, A を $m\times n$ 行列, B, C を $n\times l$ 行列, D を $l\times r$ 行列とするとき, $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

演習 1.4 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし, K を成分とする行列・ベクトルを考える.

(1) A, B を n 次の正方行列とすると, AB, BA も n 次の正方行列となる. このとき $AB = BA$ が成立するとは限らない. $AB \neq BA$ となるような例を挙げよ.

(2) 逆に $AB = BA$ が成立するような例を挙げよ.

(3) A を n 次正方行列とする. もしすべての n 次正方行列 X に対し $AX = XA$ が成り立つならば, ある $c \in K$ が存在して $A = cE_n$ となることを示せ. (ここで, E_n は n 次の単位行列を表す.)

(4) A を $m\times n$ 行列, $\boldsymbol{x}$ を n 項縦ベクトルとするとき, $A\boldsymbol{x}$ は m 項縦ベクトルとなる. $A \neq O$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ かつ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるような $A, \boldsymbol{x}$ の例を挙げよ.