12　電磁気学の法則 (その１)

ガウスの法則. 空間内に電荷が電荷密度 $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ で分布しているとし, それによって生じる電場を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ とする. このとき**ガウスの法則** (の微分形) は次の等式で表される:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 : \text{真空の誘電率}).$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{E}$ の発散だから, これは電荷が電場を発生させることを表している (正の電荷ならば電場が "湧き出し", 負の電荷ならば電場が "吸い込まれる").

S を空間内のある領域 R を囲む閉曲面とするとき, 上式の両辺を R 全体で体積分することを考える. すると, 左辺はガウスの発散定理により面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$ に一致する. また, 右辺は R 内の総電荷量 (Q とする) の $1/\varepsilon_0$ 倍に等しいので, 等式

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

を得る (ここで, 左辺の面素ベクトルの向きは R の外向き). これはガウスの法則の積分形と呼ばれる. なお, この積分形から微分形を得ることもできるので, 両者は同値である.

例題. (1) $\mathbb{R}^3$ の原点にある点電荷 Q が距離 r だけ離れた点に作る電場を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 a の球体内に電荷が電荷密度 ρ で一様に分布しているとする. このとき原点から距離 r だけ離れた点における電場を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 a の球面に電荷が電荷面密度 σ で一様に分布しているとする. このとき原点から距離 r $(\neq a)$ だけ離れた点における電場を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^3$ の z-軸をを中心軸とする半径 a の無限に長い円柱面に電荷が電荷面密度 σ で一様に分布しているとする. このとき z-軸から距離 r $(\neq a)$ だけ離れた点における電場を求めよ.

演習 12.1 (1) $\mathbb{R}^3$ の z-軸をを中心軸とする半径 a の無限に長い円柱内に電荷が電荷密度 ρ で一様に分布しているとする. このとき z-軸から距離 r だけ離れた点における電場を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の xy-平面上に電荷が電荷面密度 σ で一様に分布しているとする. このとき xy-平面から距離 r だけ離れた点における電場を求めよ.