11 ストークスの定理

回転の意味. (x, y, z)-空間で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ について, 回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ (または $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$) は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},\ \ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x},\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

と定義されていた (第 2 回プリントを参照). しかし, 座標系の x, y, z を使わないで回転を定義することもできる.

C を空間内の単一閉曲線 (交差のない閉曲線) とする. このとき, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ はベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の C に沿った回転量を与える. 実際, C 上の各点において微小量 $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ は, その点における $\boldsymbol{v}$ の $d\boldsymbol{r}$ 方向成分に線素 $||d\boldsymbol{r}||$ をかけたものだから, その総和である上記の線積分は C に沿って回転する $\boldsymbol{v}$ の成分の総量を表している. 大雑把にいえば, $\boldsymbol{v}$ がある流体の流速を表しているとした場合, その中の輪っか C が流体に押されて単位時間あたりどのくらい回転するか, ということである.

さて, 空間内のある点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{v}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は, その点を始点とする任意の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対する $\boldsymbol{n}$ 方向成分を与えることによって定義される. その方向成分 $\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は, $\boldsymbol{n}$ に直交する平面内の単一閉曲線 C に沿った $\boldsymbol{v}$ の回転量を C が囲む曲面 S の面積 ($A(S)$ とする) で割った値の, S を一点 $\{\boldsymbol{r}\}$ まで限りなく近づけるときの極限値として定める:

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \lim_{S \to \{\boldsymbol{r}\}} \frac{1}{A(S)} \int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで, 右辺の線積分における積分路の方向は, 右ねじを $\boldsymbol{n}$ 方向に進ませるときにねじ頭が回転する方向とする[1]. $\boldsymbol{n}$ として xyz-座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をとって各成分を求めていけばこの定義が最初に書いた定義と一致することが示せる.

ベクトル場の回転を直感的にとらえるには, 先程の説明で出てきた流体中の輪っか C を粒子 $\{\boldsymbol{r}\}$ にまで縮めて考えてみると良い. その時の粒子の回転を考えたとき, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ の大きさは回転の速度を表し, 向きは回転軸の方向 (回転の方向に右ねじを回した時にねじが進む方向) を表す.

[1]かなり大雑把な書き方ですが, 右回り・左回りの区別がつけば良いので誤解の恐れはないでしょう.

ストークスの定理. S を単一閉曲線 C を境界にもつ曲面とする. このときベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ. ただし, 左辺の面積分における面素ベクトル $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ の向きは, その方向に右ねじを進ませるときにねじ頭が回転する方向が右辺の積分路の方向と一致するようにとる[2]. これをストークスの定理という.

流体でいうと, 上の式の左辺は $\boldsymbol{v}$ によって S 上の各点に生じる回転の量の総和をとったものである. そして右辺は $\boldsymbol{v}$ の C に沿った回転量を表す. ストークスの定理はその 2 つの量が一致することを主張している.

例題. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (y, z, x)$ および曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ に対し,

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ. ただし, $d\boldsymbol{S}$ の向きは z 成分が非負になるようにとるものとする.

演習 11.1 ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (y + z - 2, yz + 4, -xz)$ および曲面 $S: z = 4 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$ に対し,

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ. ただし, $d\boldsymbol{S}$ の向きは z 成分が非負になるようにとるものとする.

[2]前脚注同様, 大雑把な書き方ですが誤解の恐れはないと思います.