# 10　ガウスの発散定理

**発散の意味.** $(x, y, z)$-空間で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ について, 発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

と定義されていた (第 2 回プリントを参照). しかし, 面積分を使えば, 座標系の $x, y, z$ を使わないで発散を定義することができる.

$S$ を空間内のある領域 $R$ を囲む閉曲面とする (閉曲面とは, 球面やトーラスなどの境界のない曲面のこと). このとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$ は (面素ベクトルを $R$ の外向きにとれば) 領域 $R$ の表面 $S$ を外側に向かって貫くベクトルの総量を表している. $\boldsymbol{v}$ がある流体の流速を表しているなら, これは単位時間あたりに $R$ から表面 $S$ を通って外側に流れ出る (負の値なら内側に流入する) 流体の総体積を意味する. さて, 空間内のある点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{v}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は, その面積分を $R$ の体積 ($V(R)$ とする) で割った値の, $R$ を一点 $\{\boldsymbol{r}\}$ に縮めるときの極限として定義することもできる (上記の定義と一致することが証明できる):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \lim_{R \to \{\boldsymbol{r}\}} \frac{1}{V(R)} \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

流体でいえば, これは点 $\boldsymbol{r}$ のまわりでの単位体積あたりの流出量の極限である. 特に, ある点で発散が正ならばそこは流体の湧き出し口, 負ならばそこは流体の吸い込み口であることを意味する.

**ガウスの発散定理.** $S$ を空間内のある領域 $R$ を囲む閉曲面とするとき, ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\int_R \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つ. (ただし, 右辺の面積分における面素ベクトル $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ の向きは $R$ の外向きにとる.) これをガウスの発散定理という.

流体でいうと, 上の式の左辺は $\boldsymbol{v}$ の発散の $R$ 内での総和なので, 先程の発散の意味を考えれば, 単位時間あたりに $R$ 内で湧き出す流体の総体積を表す. そして右辺は $R$ から表面 $S$ を通って外側に流れ出る流体の単位時間あたりの総体積を表している. ガウスの発散定理はその 2 つの量が一致するという (直感的には明らかな) ことを主張しているわけである.

**体積と面積分.** $S$ を空間内のある領域 $R$ を囲む閉曲面, $V(R)$ を $R$ の体積とする. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x,y,z)$ に対して $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=3$ だから, ガウスの発散定理を使えば

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = 3\int_R dxdydz = 3V(R)$$

が成立する. だから例えば, 前回の演習 9.1 では球の体積の 3 倍を計算していたことになる.

**例題.** 立方体 $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$, $|z|\leq 1$ の表面を $S$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(2x,y,7z)$ に対して積分

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ. ただし, $d\boldsymbol{S}$ の向きは立方体の外向きにとるものとする.

**演習 10.1** 円柱 $x^2+y^2\leq 4$, $|z|\leq 2$ の表面を $S$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x,3y,2z)$ に対して積分

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ. ただし, $d\boldsymbol{S}$ の向きは円柱の外向きにとるものとする.

※ガウスの発散定理を用いずに前回までの知識で上記の 2 問に取り組む場合は少し注意が必要である. 前回のように $S$ をいっぺんにパラメータ表示しようとするならば, 例えば $(u,v)$-平面内に展開図を描いて考える等のことをすることになるだろうが, そのとき $S$ の「辺」や「頂点」において接平面が定まらない (微分ができない) ために単位法ベクトルも定まらないという問題に直面するはずである. この問題を回避するには, $S$ を適当に分割して個別にパラメータ表示すれば良い. 例えば上記の例題の場合, 立方体の 6 つの側面を $S_1,\ldots,S_6$ としてそれぞれを個別にパラメータ表示し,

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} + \cdots + \int_{S_6} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

という風に, それぞれの上で面積分を計算して足し合わせれば求める積分の値を得る. ガウスの発散定理を用いるやり方よりもこちらの方が面倒であろうが, もし時間があれば両方のやり方で計算して結果が一致するかどうかを確かめてみると良い.