8　曲面とその単位法ベクトル

来週からの面積分の話の準備として, 今回は曲面の表示や単位法ベクトルについてみておくことにしよう.

曲面の表示の仕方. 曲面を表す方法には次のようなものがある:

(i) 2 変数関数のグラフとして $z = f(x, y)$ の形で表す方法. (例えば, 平面 $z = x + y$, 回転放物面 $z = x^2 + y^2$, 半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ など.) 「曲面 $z = f(x, y)$」という場合, 正確には $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ を指している.

(ii) 3 変数関数の零点として $g(x, y, z) = 0$ の形で表わす方法. (例えば平面 $2x - y - z + 1 = 0$, 球面 $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 - 9 = 0$, など.) 正確には集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$ を指す. (i) は $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ とすれば (ii) の一種と思うこともできる.

(iii) パラメータ (媒介変数) による表示. 平面内のある領域 D 上で 3 つの 2 変数関数 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ を定義して, (u, v) が D 内を動くときに点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ が描く軌跡として曲面を表示する方法. これは D から $\mathbb{R}^3$ への関数 $D \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ と思うこともできる.
集合としては $\{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D\}$ を指す.

例題. 次の曲面をパラメータ表示せよ.
(1) 楕円放物面 $z = 2x^2 + 3y^2$.
(2) 点 $(1, 0, 1)$ を通りベクトル $(1, 1, 2)$ に垂直な平面.
(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

媒介曲線と接ベクトル. $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ とパラメータ表示された曲面があるとする. この曲面の点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ における接ベクトルや接平面を考えてみよう.
まず, v を固定して $v = v_0$ とした場合, $\boldsymbol{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ は u をパラメータとする 1 つの空間曲線を表す (これを媒介曲線という). この曲線の接ベクトル

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

は元の曲面の 1 つの接ベクトルとなる.
同様に, u を固定して $u = u_0$ とした場合, $\boldsymbol{r}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$ は v をパラメータとする 1 つの空間曲線を表し, この曲線の接ベクトル

$$\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

は元の曲面のもう 1 つの接ベクトルとなる.

従って, $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ における接平面は, 点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ を通り, 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ で張られる平面となる:

$$(x, y, z) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0) + u\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) + v\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0).$$

例題. 回転放物面 $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ の点 $(1, 1, 1)$ における接平面を求めよ.

単位法ベクトル. 曲面 S : $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ の点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ における 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ のベクトル積

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に直交するベクトルである. これと同方向の単位ベクトル

$$\frac{\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)}{||\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)||}$$

を点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ における S の**単位法ベクトル**と呼ぶ. また, S の各点に対して単位法ベクトルを対応させるベクトル場

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||}$$

を**単位法ベクトル場**という.

例題. 回転放物面 $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ の点 $(1, 1, 1)$ における単位法ベクトルを求めよ.

演習 8.1 (1) 楕円放物面 $z = 3x^2 + 4y^2$ の原点における単位法ベクトルを求めよ.

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の点 $(-1, 1, \sqrt{2})$ における単位法ベクトルを求めよ.