7 曲線の長さ・線素に関する線積分

空間内の曲線 C がパラメータ表示によって $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ で表されているとする. C 上の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ から $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ の間の微小長さを ds とすると,

$$ds = ||d\boldsymbol{r}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

である. この $ds = ||d\boldsymbol{r}||$ を**線素**と呼び, 微小変位 $d\boldsymbol{r}$ に対する曲線の長さの微小変位を表す.

曲線 C の長さ L は線素 ds を C に沿って積分することで得られる:

$$L = \int_C ds = \int_C ||d\boldsymbol{r}|| = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

このような積分も線積分である. これを具体的に計算するには, 曲線 C のパラメータ付けを用いて,

$$\int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$\left(= \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)}\, dt\right)$$

と t に関する積分に帰着させる.

例題 1. パラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t) = (2t, t^2, t^3/3)$, $0 \leq t \leq 1$ で与えられる曲線の長さを求めよ.

演習 7.1 a, c を 0 でない定数とするとき, パラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ct)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ で与えられる曲線 (らせん) の長さを求めよ.

ここで, 曲線 C に沿って質量が密度 $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(x, y, z)$ で分布しているという状況を考えてみよう. このとき, C 上の総質量 m を計算するには, 微小質量 $\rho(\boldsymbol{r})||d\boldsymbol{r}||$ を C に沿って積分すれば良いので,

$$m = \int_C \rho(\boldsymbol{r})||d\boldsymbol{r}||$$

という線積分になる. このように, 線素に関してスカラー場を線積分することもある.

例題 2. 例題 1 の曲線を C とするとき, スカラー場 $f(x, y, z) = x + y$ に対して線積分

$$\int_C f(\boldsymbol{r})||d\boldsymbol{r}||$$

を計算せよ.