# 6　力学における仕事

**力学における仕事.** 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (F_1(\boldsymbol{r}), F_2(\boldsymbol{r}), F_3(\boldsymbol{r}))$ の下で粒子が曲線 $C$ に沿って移動したときの, $\boldsymbol{F}$ が粒子にする仕事 $W$ を考えてみよう. 粒子が曲線 $C$ 上を点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ から $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ まで微小に移動するときに $\boldsymbol{F}$ がする微小仕事 $dW$ は, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と微小変位 $d\boldsymbol{r}$ との内積である:

$$dW = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = F_1(\boldsymbol{r})dx + F_2(\boldsymbol{r})dy + F_3(\boldsymbol{r})dz.$$

この微小仕事の曲線に沿った和が仕事 $W$ なので,

$$W = \int_C dW = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

と線積分で計算される.

**例題 1.** 質量 $m$ の粒子が力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の下で運動しており, その座標が時間 $t$ に対して $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ で与えられているとする. ここで, $\boldsymbol{r}(t)$ は運動方程式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

に従う. このとき粒子の $t = t_1$ から $t = t_2$ $(t_1 \leq t_2)$ までの軌跡を $C$ とすると,

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t_2)^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t_1)^2$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)^2$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}, \quad \boldsymbol{v}(t)^2 = \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)$$

を意味する.

※上記は $\boldsymbol{F}$ のする仕事が粒子の運動エネルギーの増分に等しいことを与える等式となっている.

**保存力場.** 力の場 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー場 $V$ を用いて $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V$ と書けるとき, $\boldsymbol{F}$ を**保存力場**といい, $V$ を $\boldsymbol{F}$ の**ポテンシャル**という.

**例題 2.** $V$ をポテンシャルとする保存力場 $\boldsymbol{F}$ の下で運動する粒子に対して力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2 + V(\boldsymbol{r}(t))$$

が保存することを示せ. (力学的エネルギー保存の法則.)

**演習 6.1** (1) 3 次元調和振動子の場

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-kx, -ky, -kz)$$

($k$ は正の定数) に対し, そのポテンシャルを一つ求めよ.

(2) 重力場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{c}{r^3}\boldsymbol{r}, \quad r = ||\boldsymbol{r}||$$

($c$ は正の定数) に対し, そのポテンシャルが

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{c}{r}$$

で与えられることを示せ.

**例題 3.** $V$ をポテンシャルとする保存力場 $\boldsymbol{F}$ の下で運動する粒子の座標が時間 $t$ に対して $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ で与えられているとする. 粒子の $t = t_1$ から $t = t_2$ $(t_1 \leq t_2)$ までの軌跡を $C$ とするとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}(t_1)) - V(\boldsymbol{r}(t_2)).$$

※この式は, 保存力場の場合には線積分が端点の座標のみに依存し経路に依存しないことを示している.

**演習 6.2** $k$ を正の定数とし, ベクトル場

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-kx, -ky, -kz)$$

を考える. 曲線

$$C : (x,y,z) = (t\cos t, t\sin t, t^3), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

に対して, 線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ.