5　線積分 (その 2)

前回に引き続き, 空間内の曲線 C がパラメータ表示によって $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$ で表されているとする. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ に対し, C の各点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{v}$ の値 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と C に沿った微小変位 $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ との内積

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = v_1(\boldsymbol{r})dx + v_2(\boldsymbol{r})dy + v_3(\boldsymbol{r})dz$$

をとり, それを C 全体にわたって足し合わせた積分

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz)$$

を, $\boldsymbol{v}$ の C に沿った線積分という. (結果がスカラーになるので, 「スカラー線積分」と呼ぶこともある.) これを具体的に計算するには, やはり曲線 C のパラメータ付け $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$ を用いて,

$$\begin{aligned}
&\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (v_1(x,y,z)dx + v_2(x,y,z)dy + v_3(x,y,z)dz) \\
= &\int_a^b \left(v_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx(t)}{dt} + v_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy(t)}{dt} + v_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz(t)}{dt} \right) dt
\end{aligned}$$

とパラメータ t に関する通常の積分に帰着させる.

例題 1. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y, (x+z)^2, (x-z)^2)$ と曲線

$$\begin{aligned}
C_1 &: \text{放物線 } y = x^2,\ z = 0 \text{ の } (0,0,0) \text{ から } (2,4,0) \text{ までの部分}, \\
C_2 &: (0,0,0) \text{ と } (2,4,0) \text{ を結ぶ線分}
\end{aligned}$$

に対し, 次の線積分を計算せよ:

$$\int_{C_i} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \quad (i = 1, 2).$$

この例題の計算結果を見れば, 前回同様, 線積分の結果が一般には曲線の端点だけでなく経路にも依存することが分かる. しかしベクトル場によっては線積分の結果が端点だけに依存し経路に依存しないこともある. そのようなベクトル場については次回解説する.

例題 2. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x, yz, xy)$ の, 円 $C : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ.

例題 3. ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(-y,x,z)$ の, 円 $C:\ x^2+y^2=1,\ z=0$ に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ.

この例題で, 円のパラメータ付けを $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,0),\ 0\le t\le 2\pi$ ととった場合と $(x,y,z)=(\cos(-t),\sin(-t),0),\ -2\pi\le t\le 0$ ととった場合とを比べると, 曲線 C のパラメータ付けの向きにも線積分の結果が依存することが分かる. 一般に, パラメータ付けの向きをこのように逆向きにすると, 線積分の符号が逆転する.

演習 5.1 次で与えられたベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と曲線 C に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ. (C のパラメータ付けの向きは各自で適当に定めてよい.)

(1) $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(3x,2xz-y,z)$, 曲線 $C:\ x=2y^2,\ z=4y^2-y\ (0\le y\le 1)$.

(2) $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(3x,2xz-y,z)$, 曲線 C は $(0,0,0)$ と $(2,1,3)$ を結ぶ線分.

(3) $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x+2,y^2,z)$, 曲線 $C:\ x^2+y^2=1,\ z=0$.

また, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と $d\boldsymbol{r}$ とのベクトル積をとって積分

$$\int_C \boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\int_C(v_2dz-v_3dy)+\boldsymbol{j}\int_C(v_3dx-v_1dz)+\boldsymbol{k}\int_C(v_1dy-v_2dx)$$

を考えることもできる. これは積分結果がベクトルになる.

例題 4. $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x,y,z)$ と円 $C:\ x^2+y^2=1,\ z=0$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r}$ を計算せよ.