4 線積分 (その１)

空間内の曲線 C がパラメータ表示によって $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ で表されているとする. この曲線 C に沿っての微小な変位を表すベクトル $d\boldsymbol{r}$ を考える:

$$d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz) = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}.$$

この $d\boldsymbol{r}$ による積分を**線積分**という.

例えば, f をスカラー場とするときの

$$\int_C f d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\int_C f dx + \boldsymbol{j}\int_C f dy + \boldsymbol{k}\int_C f dz$$

は線積分である. これを具体的に計算するには, 曲線 C のパラメータ付け $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ を用いて,

$$\begin{aligned}\int_C f d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{i}\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + \boldsymbol{j}\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\frac{dy(t)}{dt}dt \\ &\quad + \boldsymbol{k}\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

と書き換えてパラメータ t に関する通常の積分に帰着させる. (適当に変数を省略して

$$\int_C f d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\int_a^b f\frac{dx}{dt}dt + \boldsymbol{j}\int_a^b f\frac{dy}{dt}dt + \boldsymbol{k}\int_a^b f\frac{dz}{dt}dt$$

のように書いた方が見やすいかもしれない.)

例題. スカラー場 $f(x, y, z) = xy$ をとる. 曲線 $y = x^2$, $z = 0$ の $(0, 0, 0)$ から $(1, 1, 0)$ までの部分を C とするときの, C に沿った線積分

$$\int_C f d\boldsymbol{r}$$

を求めよ.

演習 4.1 スカラー場 $f(x, y, z) = xy$ をとる. $(0, 0, 0)$ と $(1, 1, 0)$ を結ぶ線分を C とするときの, C に沿った線積分

$$\int_C f d\boldsymbol{r}$$

を求めよ.