3　曲線を表示する方法

第 1 回のプリントで曲線のパラメータ表示というものを用いた (演習 1.1 の下あたり) が, そのようなやり方に不慣れな人も多かったかもしれない. 来週からの線積分の話の準備として, 今回は曲線の表示についてもう少し詳しくみておくことにしよう.

平面曲線の表示の仕方. 平面上の曲線を表す方法には次のようなものがある:

(i) 1 変数関数のグラフとして $y = f(x)$ の形で表す方法. (例えば, 直線 $y = 2x - 1$, 放物線 $y = x^2$, など.) 「曲線 $y = f(x)$」という場合, 正確には $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ を指している.

(ii) 2 変数関数の零点として $g(x, y) = 0$ の形で表わす方法. (例えば直線 $2x-y-1 = 0$, 放物線 $x^2-y = 0$, 円 $x^2+y^2-9 = 0$, など.) 正確には集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ を指す. (i) は $g(x, y) = f(x) - y$ とすれば (ii) の一種と思うこともできる.

(iii) パラメータ (媒介変数) による表示. ある区間 I 上で 2 つの 1 変数関数 $x(t), y(t)$ を定義して, t が I 内を動くときに点 $(x(t), y(t))$ が描く軌跡として曲線を表示する方法. (例えば, 直線 $(x, y) = (t, t + 1)$ $(t \in \mathbb{R})$, 放物線 $(x, y) = (t, t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$, 円 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi))$.) これは I から $\mathbb{R}^2$ への関数 $I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ と思うこともできる. 集合としては $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ を指す.

例題. 次の曲線をパラメータ表示せよ.
(1) 放物線 $2x^2 - 3y + 1 = 0$.
(2) 点 $(1, 2)$ を通りベクトル $(1, -3)$ に平行な直線.
(3) 点 $(-1, 0)$ を通りベクトル $(2, 1)$ に垂直な直線.
(4) 円 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0$

演習 3.1 次の曲線をパラメータ表示せよ.
(1) 放物線 $y = -3x^2 + 5$.
(2) 点 $(1, 1)$ を通りベクトル $(-1, 1)$ に平行な直線.
(3) 点 $(1, 2)$ を通りベクトル $(-3, 1)$ に垂直な直線.
(4) 円 $(x - 1)^2 + y^2 - 9 = 0$

空間曲線の表示の仕方. 3 次元空間で上記の (i), (ii) のように等式で図形を表す場合, 1 つの等式だけでは一般には曲面になるので, 曲線を表すためには等式が 2 つなければならない. 空間内の曲線を表すには次のような方法がある.

(iv) 2 つの 3 変数関数の共通零点として, $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ という形 (あるいはそれと同値な方程式) で表す方法. 例えば, 点 $(1, 2, 3)$ を通りベクトル $(3, 2, 1)$

に平行な直線は,

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$$

で表される.

(v) ある区間 I 上で 3 つの 1 変数関数 $x(t), y(t), z(t)$ を定義して, t が I 内を動くときに点 $(x(t), y(t), z(t))$ が描く軌跡として曲線を表示する方法. これは関数 $I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ と思うこともできる. 例えば, 点 $(1,2,3)$ を通りベクトル $(3,2,1)$ に平行な直線は $(x,y,z)=(1,2,3)+t(3,2,1)$ $(t \in \mathbb{R})$ で表される.

接ベクトルと法ベクトル. 曲線上の点に対し, そこでの接線に平行なベクトルを接ベクトル, 接線に垂直なベクトルを法ベクトルという. パラメータ表示された曲線 $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ の場合, 接ベクトルは下記ように t による微分を考えれば得られる.

$t=t_0$ に対応する曲線上の点 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ を P とおく. さらに, t を少し動かして $t=t_0+\Delta t$ としたときの曲線上の点 $(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t))$ を Q とおく. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を Δt で割ったベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}/\Delta t$ は, Δt が十分 0 に近ければ点 P における曲線の接線方向をよく近似しているはずである. そこで, もし x, y, z が $t=t_0$ で微分可能ならば, $\Delta t \to 0$ としたときの極限をとることにより点 P における接ベクトルを得ることができる:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\Delta t} \\
=\ & \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} \right) \\
=\ & (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).
\end{aligned}$$

すなわち, $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ は点 P $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ における接ベクトルとなる.

例. 放物線 $y=x^2$ をパラメーター表示して $(x,y)=(t,t^2)$ を考える. すると $(x',y')=(1,2t)$ なので, $t=t_0$ に対応する放物線上の点 (t_0, t_0^2) における接ベクトルとして $(1, 2t_0)$ が得られる. 例えば $t=0$ に対応する点 $(0,0)$ では接ベクトルが $(1,0)$ となり x 軸と平行になる (放物線の頂点のところ).

例. 原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2-1=0$ をパラメーター表示して $(x,y)=(\cos t, \sin t)$ を考える. $(x',y')=(-\sin t, \cos t)$ なので, $t=t_0$ に対応する円周上の点 $(\cos t_0, \sin t_0)$ における接ベクトルとして $(-\sin t_0, \cos t_0)$ が得られる. ちなみに, この点の位置ベクトルと接ベクトルとの内積をとってみると,

$$(\cos t_0, \sin t_0) \cdot (-\sin t_0, \cos t_0) = -\cos t_0 \sin t_0 + \sin t_0 \cos t_0 = 0$$

となるので, 両者が常に直交するという良く知られた事実を確認することができる.