2 ベクトル場・スカラー場 (その 2)

演算子 ∇. (x,y,z)-空間での勾配を考えるときに, 形式的に

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

という演算子を考えて $\operatorname{grad} f$ を ∇f と表すことがある. これは, 記述を簡便にするための記号的なベクトルとみなしておけばよい.

ベクトル場の発散 (div) と回転 (rot, curl). (x,y,z)-空間 $\mathbb{R}^3$ のある領域で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{v} = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$$

に対し, $\boldsymbol{v}$ の**発散** $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ を

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

により定義する.

　また, $\boldsymbol{v}$ の**回転** $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ を

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},\ \ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x},\ \ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

により定義する. $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ を $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ と書くこともある.

　演算子 ∇ を使うと, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ と $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ は形式的には,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}v_1 + \frac{\partial}{\partial y}v_2 + \frac{\partial}{\partial z}v_3,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

と書ける.

例題. ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (y^2\cos x + z^3, 2y\sin x - 4, 3xz^2 + 2)$ に対して $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ をそれぞれ計算せよ.

演習 2.1 ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ に対して $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ をそれぞれ計算せよ.