0 ベクトル積 (外積)

$\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$$

により定める.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ を 2 つの空間ベクトルとするとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の <u>ベクトル積</u>(または <u>外積</u>) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

により定める. 便宜的に行列式の記号を使って

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

と覚えておくと便利である.

演習 0.1 次のことを確かめよ.

(1) $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$.

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

(4) 任意の実数 c に対し, $(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (c\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

演習 0.2 逆に, 上記の (1)–(4) の性質を満たす演算 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は上で定義したベクトル積以外にはありえないことを示せ.

[ヒント] $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ と分解し, (1)–(4) を使って $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の線形結合として表してみる.

幾何学的には, ベクトル積は次の (i)(ii) を満たすベクトルとして定まる:

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい. ただし, 面積が 0 の場合 ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行, または, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらかが $\boldsymbol{0}$ の場合) は, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 両方に直交し, さらに, $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ の方に回転するとき右ねじが進む方向.

実際, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し (i)(ii) を満たすベクトルを与える演算 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は上記の (1)–(4) を満たす. 具体的には, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とし, (ii) の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とおくと, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \sin \theta)\boldsymbol{u}$ となる.