6. 体の拡大次数

K を体とする．実ベクトル空間や複素ベクトル空間と同様にして, K の元をスカラーとするベクトル空間を定義することができる．これを K-ベクトル空間 (または「K 上のベクトル空間」) という．例えば, R を可換環, K をその部分体とすると, R は自然に K-ベクトル空間になる．線形独立, 線形従属, 基底, 次元 ($\dim_K$ と書く) などの概念や線形写像についても, これまで学んできた線形代数と同様に考えることができる．

問題 6.1. R を整域, K をその部分体とする．もし $\dim_K R < \infty$ ならば, R は体であることを示せ．(★★★)

L を体, K をその部分体とする．このとき K から見た場合, L は K の**拡大体**であるという．またこの状況を L/K と表すこともある．L を K-ベクトル空間とみたときの次元 $\dim_K L$ を $[L : K]$ と書き, L/K の**拡大次数**という．

問題 6.2. 自然数 n について, もし $a^2 \mid n$ かつ $a > 1$ なる自然数 a が存在しないなら, n は無平方 (square-free) であるという．

(1) n を 1 より大きい無平方な自然数とするとき, $[\mathbb{Q}(\sqrt{n}) : \mathbb{Q}] = 2$ となることを示せ．(★★)

(2) n, m を 1 より大きい無平方な自然数, n と m は互いに素とするとき, $[\mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}) : \mathbb{Q}] = 4$ となることを示せ．(★★★)

(3) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．(★★)

(4) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．(★★★)

L を体 K の拡大体とする．$a \in L$ について, あるゼロでない K 係数多項式 $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ が存在して $f(a) = 0$ となるとき, a は K **上代数的**であるという．特に, $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数を**代数的数**と呼び, そうでないものを**超越数**と呼ぶ．

体拡大 L/K について, L のすべての元が K 上代数的であるとき, L/K は**代数拡大**であるという．

問題 6.3. $[L : K] < \infty$ ならば L/K は代数拡大であることを示せ．(★★)

問題 6.4. L を体, M を L の部分体, K を M の部分体とする (つまり $K \subset M \subset L$). このとき, L/M と M/K が共に代数拡大ならば L/K も代数拡大であることを示せ．(★★★)