5. 体とその標数

K を可換環とし, $0_K, 1_K$ をそれぞれ K のゼロ元, 単位元とする. もし K の 0_K でない元がすべて可逆元 (つまり, 任意の $a \in K$ について, $a \neq 0_K$ ならば, ある $x \in K$ が存在して $ax = xa = 1_K$) ならば, K は**体**であるという. 元の個数が有限個の体を**有限体**, 無限個の体を**無限体**と呼ぶ.

問題 5.1. 体は必ず整域になること (K が体のとき, $a, b \in K$, $ab = 0_K$ ならば $a = 0_K$ または $b = 0_K$) を示せ. (★)

問題 5.2. R を, 元の個数が有限個の可換環とする.

(1) もし R が整域ならば, R は体であることを示せ. (★★★)

(2) もし R の元の個数が素数ならば, R は体であることを示せ. (★★★)

[ヒント] (1) $a \in R$, $a \neq 0$ のとき, 写像 $f_a : R \to R$, $r \mapsto ar$ が全単射になることを示せばよい.

注意. 問題 5.2 (1) は R の元の個数が無限個のときは必ずしも成立しない (例えば整数全体 $\mathbb{Z}$ は整域だが体ではない).

例. (1) 有理数全体 $\mathbb{Q}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ は体である.

(2) p が素数のとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体である.

問題 5.3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ が体になることを示せ. (★★)

問題 5.4.

(1) $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ のとき, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体になるのは n が素数のときに限ることを示せ. (★★)

(2) 元の個数が素数でない有限体は存在するか? (★★★★)

体の標数.

K を体とし, 自然数 m に対して

$$m1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m}$$

と置く. このときもし, $n1_K = 0_K$ となる自然数 n (≥ 1) が存在するならば, そのような n のうち最小のものを K の**標数**という. また, そのような n が存在しないときは K の標数は 0 とする. なお, 体 K の標数を $\mathrm{ch}\, K$ や $\mathrm{char}\, K$ などの記号で表すことがある (ch, char は characteristic (標数) の略).

問題 5.5. 体の標数は 0 でなければ素数であることを証明せよ. (★★)

問題 5.6. 体 K の標数が $p > 0$ なら, 任意の $a, b \in K$ に対し $(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つことを示せ. (★★★)

R を可換環とする. R の部分環のうち, 体になっているものは R の**部分体**という.

問題 5.7. L を体とする. K_1, K_2 が L の部分体ならば $K_1 \cap K_2$ も L の部分体であることを示せ. (★)

問題 5.8. 体 K の部分体が K のみであるとき, K を **素体**という.

(1) 素体は $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p : 素数) に同型 (環同型) であることを示せ. (★★)

(2) 任意の体は素体を唯一つだけ含むことを示せ. (★★)