4. 多項式行列の単因子論とジョルダン標準形

K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし, K 係数の多項式環 $K[x]$ の元を成分にもつ $m \times n$ 行列の全体を $M_{m,n}(K[x])$ と書く. $M_{m,n}(K[x])$ に含まれる行列の行列式は一般には多項式 $(\in K[x])$ になるが, もし行列式が定数 $(\neq 0)$ となるなら, その行列は可逆となる:

問題 4.1. $A(x) \in M_n(K[x])$ について, 次の (a), (b) が同値であることを示せ. (★★)
(a) ある $B(x) \in M_n(K[x])$ が存在して $A(x)B(x) = B(x)A(x) = E_n$ ($A(x)$ が可逆),
(b) ある $c \in K^\times$ が存在して $\det A(x) = c$.

多項式行列の単因子論においては, 上記の (a)(b) を満たす可逆な行列が, 整数行列の単因子論におけるユニモジュラー行列の役割を果たす. つまり, 単因子標準形を求める際に使ってよい基本変形は, 対応する基本行列が可逆なものに限られる:

- ある i 行 (列) とある j 行 (列) とを入れ替える.
- ある i 行 (列) に, ある j $(\neq i)$ 行 (列) の多項式倍を加える.
- ある i 行 (列) に 0 でない定数 $(\in K^\times)$ をかける.

定理. (教科書の定理 2.34, 2.50) $A(x) \in M_{m,n}(K[x])$ とする. このとき $A(x)$ に上記の基本変形を何回か施して, 次の形にできる.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} e_1(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & e_2(x) & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & e_3(x) & \ddots & \vdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_r(x) & \\ \hline & & O & & & O \end{array}\right)$$

ただし, $r = 0$ の場合も含める. ここで, 各 $e_i(x)$ はモニック多項式で, $e_i(x)$ は $e_{i+1}(x)$ の因子である.

このとき $(e_1(x), e_2(x), \ldots, e_r(x), \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-r})$ を $A(x)$ の**単因子**と呼び, 結論の形の行列を $A(x)$ の **単因子標準形**と呼ぶ (ここで, l は m, n のうち小さい方). 単因子は $A(x)$ に対して一意的に定まる.

例題. 行列 $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ の単因子標準形を求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (1/2)x \\ x & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (1/2)x \\ 0 & -(1/2)x^2+3 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1/2)x^2+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) \end{pmatrix}$.

問題 4.2. 次の行列の単因子標準形を求めよ. (各 ★★)

(1) $\begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ x^3+3x & x^2-x \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & x-1 & -1 \\ x+1 & 3 & 2x-7 \\ 1 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ x & x & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x \end{pmatrix}$

ジョルダン標準形. $A, B \in M_n(K)$ とするとき, 次の (a), (b) は同値であることが知られている (教科書の定理 2.53):

(a) ある正則行列 $P \in M_n(K)$ が存在して $P^{-1}AP = B$,
(b) 多項式行列 $xE - A$ と $xE - B$ の単因子が一致する (E は単位行列).

また, 定数 $c \in K$ と自然数 k に対し, 固有値 c の k 次ジョルダン細胞

$$J_k(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \in M_k(K) \quad (k = 1 \text{ のときは } J_1(c) = c)$$

を考えると, 簡単な計算により, $xE - J_k(c)$ の単因子は $(1, 1, \ldots, 1, (x-c)^k)$ となることが分かる.

さて, 複素 n 次行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, $xE - A$ の単因子が $(e_1(x), \ldots, e_n(x))$ であったとする. 単因子の積 $e_1(x) \cdots e_n(x)$ は行列式 $|xE - A|$ (A の固有多項式) の定数倍となるはずだが, 両者はともにモニック多項式なので, $e_1(x) \cdots e_n(x) = |xE - A|$ が成立する. 従って, A の相異なる固有値全体を $a_1, \ldots, a_r$ とおくと, 各 $e_i(x)$ は

$$e_i(x) = (x - a_1)^{t_{i1}} \cdots (x - a_r)^{t_{ir}} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(各 t_{ij} は非負整数, $\sum_{i,j} t_{ij} = n$) と書けるはずである. ここで, $J_{t_{ij}}(a_j)$ たちを対角線上に並べた行列 (並べる順番は任意で良い) を

$$J_A = \bigoplus_{i,j} J_{t_{ij}}(a_j) \quad (\in M_n(\mathbb{C}))$$

とおく (ただし, $t_{ij}=0$ のときは $J_{t_{ij}}(a_j)$ のところは無いものとして考える). このとき $xE-J_A$ の単因子は $(e_1(x),\dots,e_n(x))$ となるので, 上の (a) $\Leftrightarrow$ (b) により, ある正則行列 $P\in M_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP=J_A$. 従って, この J_A が A のジョルダン標準形となる.

問題 4.3. 次の行列 A に対して, $xE-A$ の単因子標準形を求め, さらにそれをもとに A のジョルダン標準形を求めよ. (各 ★★)

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\3&-4&-2\\-4&7&4\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-2\\1&1&1&0\\2&1&2&2\\1&1&0&3\end{pmatrix}$ (4) $A=\begin{pmatrix}-4&-2&-3&1\\6&2&4&-2\\1&1&1&0\\-4&-2&-3&1\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1&1\\1&-2&3&1\\1&-1&1&0\\-1&1&-2&-1\end{pmatrix}$