3. 有限生成アーベル群の基本定理

問題 3.1. (1) G を有限生成アーベル群, $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ とする. $P = (p_{ij})$ を n 次のユニモジュラー行列とし, $h_i = g_1^{p_{i1}} \cdots g_n^{p_{in}}$ $(i = 1, \dots, n)$ とおくと, $G = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ となることを示せ. (★★★)

(2) $X = \mathbb{Z}^n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $x_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $x_n = (0, \dots, 0, 1)$ とする. $Q = (q_{ij})$ を $n \times n$ の整数行列とし, $y_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j$ とおく. このとき, $X = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ となることと Q がユニモジュラー行列であることが同値であることを示せ. (★★★)

例題. 次の有限生成アーベル群 G について, 有限生成アーベル群の基本定理の証明を参考にして, G から $\mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ $(e_1 > 1,\ e_i | e_{i+1}\ (i = 1, \dots, k-1))$ の形の群への同型写像 (全単射な群準同型写像) を具体的に構成せよ:

$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(2n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とするときの $G = X/H$.

[解答例[1]] $(m, n) \in X$ の H に関する剰余類を $\overline{(m,n)}$ と書くことにすれば,

$$G = \langle \overline{(1,0)}, \overline{(0,1)} \rangle$$

である. また, 全射準同型 $\phi : X \to G$, $(m, n) \mapsto \overline{(m,n)}$ を考えると, $\operatorname{Ker}\phi = H = \langle (2, 2) \rangle$. 生成元の数を合わせるため, あえて $\operatorname{Ker}\phi = \langle (2, 2), (0, 0) \rangle$ と書くことにする. $x_1 = (1, 0), x_2 = (0, 1) \in X$, $c_1 = (2, 2), c_2 = (0, 0) \in \operatorname{Ker}\phi$ とすると,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書ける. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考えて PAQ^{-1} が単因子標準形となるようなユニモジュラー行列 P, Q を求めると,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

そこで,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \left(= PA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (PAQ^{-1}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

とおけば, (問題 3.1 より) $X = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle$, $\operatorname{Ker}\phi = \langle c_1, c_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ で, $b_1 = e_1 y_1$, $b_2 = e_2 y_2$ $(e_1 = 2,\ e_2 = 0)$ だから,

$$G \simeq X/\operatorname{Ker}\phi = \langle y_1, y_2 \rangle / \langle b_1, b_2 \rangle \simeq \langle y_1 \rangle / \langle b_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle / \langle b_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

[1] 説明のため, 必要以上に丁寧に書いています.

同型写像 $\varphi : G \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を構成するには, $\varphi(\phi(y_1)) = (\bar{1}, 0)$, $\varphi(\phi(y_2)) = (\bar{0}, 1)$ となるように群準同型をつくれば良い. G の任意の元は $\overline{(m,n)} = m\phi(y_1) + (n-m)\phi(y_2)$ と書けるので,

$$\varphi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \varphi(\overline{(m,n)}) = (\overline{m}, n-m)$$

とすれば φ は同型写像になる. □

問題 3.2. 次で与えられる有限生成アーベル群 G について, G から $\mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ ($e_1 > 1$, $e_i | e_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$) の形の群への同型写像を具体的に構成せよ. (各 ★★)

(1) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とするときの $G = X/H$.

(2) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(2m, 3n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ とするときの $G = X/H$.

(3) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(2m+n, 6m+2n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ とするときの $G = X/H$.

(4) $G = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n = 0\}$.

(5) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(m, n) \in X \mid 3m + 2n = 0\}$ とするときの $G = X/H$.

(6) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(l+m+n, l+m+n, l+m+3n) \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}$ とするときの $G = X/H$.

(7) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \{(l, m, n) \in X \mid l - 3m - 2n = 0\}$, $G = X/H$.

(8) $G = \{(l, m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid l - 3m - 2n = 0\}$.

(9) $G = \langle (1,2,3),\ (1,1,1),\ (-1,0,1) \rangle \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(10) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H = \langle (1,2,3),\ (1,1,1),\ (-1,0,1) \rangle$, $G = X/H$.

(11) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(12) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(13) $G = \langle 2,\ \sqrt{2} \rangle \subset \mathbb{R}^\times$.

(14) $G = \langle \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{3} \rangle \subset \mathbb{R}^\times$.

(15) $G = \left\langle \sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4} \right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(16) $G = \left\langle -1,\ \ \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3} \right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(17) $G = \left\langle \sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5} \right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(18) $G = \left\langle 1 + \sqrt{-1},\ \ \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3} \right\rangle \subset \mathbb{C}^\times$.

(19) S_n を n 次の対称群, A_n を S_n の中の偶置換全体のなす部分群とするときの $G = S_n/A_n$.

(20) クラインの 4-群. $G = \{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\} \subset S_n$ $(n \geq 4)$.