1. 群の復習, 剰余類と剰余群, 準同型写像と準同型定理

問題 1.1. 集合 G とその内部演算 $\cdot$ が次さえ満たせば $(G, \cdot)$ は群になることを示せ. (★★★★)

(i) (結合律) 任意の $a, b, c \in G$ について $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(ii) (右単位元) ある $e \in G$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対し $g \cdot e = g$,
(iii) (右逆元) 任意の $g \in G$ に対してある $g' \in G$ が存在して $g \cdot g' = e$.

問題 1.2. 空でない集合 G と結合律を満たす内部演算 $\cdot$ が次さえ満たせば $(G, \cdot)$ は群になることを示せ. (★★★★)

任意の $g, h \in G$ に対し, ある $x, y \in G$ が存在して $g \cdot x = h$, $y \cdot g = h$.

問題 1.3. $G = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi(x) = ax + b,\ 0 \neq a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ は写像の合成に関して群をなすことを示せ. (★★)

問題 1.4. G を群, e を G の単位元, $x, y, z \in G$ とする. 次を示せ.

(1) $xy = xz \Rightarrow y = z$. (★)
(2) $xy = zy \Rightarrow x = z$. (★)
(3) $x^2 = x \Rightarrow x = e$. (★)

問題 1.5. G を群, e を G の単位元とする. 次を示せ.

(i) 任意の $g \in G$ に対し $g^2 = e$ が成り立つならば, G はアーベル群である. (★★★)
(ii) 任意の $g, h \in G$ に対し $(gh)^2 = g^2h^2$ が成り立つならば, G はアーベル群である. (★★★)

問題 1.6. $C = \{\cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とおく.

(1) C は $\mathbb{C}^\times$ の部分群であることを示せ. (★★)
(2) C の有限部分群はすべて巡回群であることを示せ. (★★★★)

問題 1.7. G を群, H を G の部分群, g を G の任意の元とする.

(1) gHg^{-1} も G の部分群であることを示せ. (★★)
(2) G が有限群のとき, G における H の指数 $[G : H]$ と gHg^{-1} の指数 $[G : gHg^{-1}]$ は等しいことを示せ. (★★★)

剰余群. G を群, H を G の部分群とする. H が次を満たすとき G の**正規部分群**であるといい, $G \rhd H$ または $H \lhd H$ と表す:

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対し } gHg^{-1} = H \ (\Leftrightarrow \text{任意の } g \in G \text{ に対し } gHg^{-1} \subset H).$$

H が G の正規部分群であるとき, G の H による右剰余類と左剰余類は一致する (任意の $g \in G$ に対し $gH = Hg$). そして H による剰余類全体の集合 $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ は積 $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$ により群をなす. これを H による G の**剰余群**という.

準同型写像. G_1, G_2 を群とするとき, 写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ が**準同型写像**であるとは, 任意の $g, h \in G_1$ について $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ が成り立つことをいう. 全単射な準同型写像を**同型写像**と呼ぶ. もし G_1 から G_2 への同型写像が存在するなら G_1 と G_2 は同型であるといい, $G_1 \cong G_2$ (または $G_1 \simeq G_2$) と書く.

問題 1.8. G_1, G_2 を群とし, 単位元はどちらも e で表すことにする. また, $\varphi : G_1 \to G_2$ を準同型写像とする.

(1) $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(G_1)$ は G_2 の部分群であることを示せ. (★★)
(2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = e\}$ は G_1 の正規部分群であることを示せ. (★★)
(3) $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\} \Leftrightarrow \varphi$ は単射, を示せ. (★★)
(4) (**準同型定理**) $G_1/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ を示せ. (★★)

問題 1.9. G を群とし, H_1, H_2 を G の正規部分群とする.

(1) 写像 $\varphi : G \to G/H_1 \times G/H_2$ を $\varphi(g) = (gH_1, gH_2)$ により定める. このとき φ が準同型写像になることを示し, $\operatorname{Ker}\varphi$ を求めよ. (★★)
(2) G/H_1 と G/H_2 が共にアーベル群ならば $G/(H_1 \cap H_2)$ もアーベル群になることを示せ. (★★★)

問題 1.10. G を群とし, H を G の部分群とする. このとき G の H による左剰余類全体の集合 $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ から右剰余類全体の集合 $H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ への全単射が存在することを示せ. (★★★★)

問題 1.11. G を群, H を G の部分群, K を G の正規部分群とする.

(1) $H \cap K$ は H の正規部分群であることを示せ. (★★)
(2) $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ が G の部分群になることを示せ. (★★★)
(3) 同型 $HK/K \cong H/(H \cap K)$ を示せ. (★★★)

問題 1.12. G を群とするとき, G のすべての元と可換な元全体 $Z(G) = \{s \in G \mid gs = sg \quad ({}^\forall g \in G)\}$ を G の中心という.

(1) $Z(G)$ は G の正規部分群になることを示せ. (★★)
(2) $G/Z(G)$ が巡回群ならば G はアーベル群であることを示せ. (★★★★)