

17 既約性の判定

問題 17.1 (1) $f(X) = X^2 + X + 1$ が $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

(2) $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ が $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

(3) 一般に, p を素数とすると, $f(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + 1$ は $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

[ヒント] 問題 16.4 により, $f(X+1)$ が既約であることを示せばよい. $f(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$ だから $f(X+1) = ((X+1)^p - 1)/X$ となることに注意.

問題 17.2 次の多項式が $\mathbb{Q}[X]$ において既約かどうかを判定せよ.

(1) $X^3 + 4X^2 + 2X + 2$

(2) $X^3 + 2X + 4$

(3) $X^3 - 6X - 9$

(4) $2X^4 + 6X^3 + 12X + 30$

(5) $2X^5 + 20X^4 + 30X^2 + 10X + 5$

¹ホームページ <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html>