# 15　多項式のイデアル・ユークリッドの互除法

$K$ は有理数全体 $\mathbb{Q}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ のいずれかとし, $K$ 係数の (1 変数) 多項式全体 $K[X]$ (多項式環) を考える. 整数環と同様に, $K[X]$ の部分集合 $I$ が次の (i)(ii) を満たすとき, $I$ を $K[X]$ の**イデアル**という:

(i) 任意の $f(X), g(X) \in I$ について $f(X) + g(X) \in I$,

(ii) 任意の $r(X) \in K[X]$, $f(X) \in I$ について $r(X)f(X) \in I$.

$K[X]$ の任意のイデアルは加法に関する部分群となっているが, 整数環の場合 (問題 11.2) とは違い, $K[X]$ の加法に関する部分群が常にイデアルになるとは限らない (例えば $\{nX \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は加法に関する $K[X]$ の部分群だが, イデアルではない).

$f_1(X), \ldots, f_n(X) \in K[X]$ に対して

$$I(f_1(X), \ldots, f_n(X)) = \{g_1(X)f_1(X) + \cdots + g_n(X)f_n(X) \mid g_1(X), \ldots, g_n(X) \in K[X]\}$$

は $K[X]$ のイデアルである. これを $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ が生成するイデアルという. なお, $I(f_1(X), \ldots, f_n(X))$ は $(f_1(X), \ldots, f_n(X))$ または $\langle f_1(X), \ldots, f_n(X) \rangle$ などと表すこともある.

また, 整数環と同様に, $K[X]$ の任意のイデアル $I$ に対してある $d(X) \in K[X]$ が存在し, $I = I(d(X))$ と書ける (教科書の定理 2.18). $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in K[X]$ に対して

$$I(f_1(X), \ldots, f_n(X)) = I(d(X))$$

となる $d(X)$ のうち (必要なら適当に定数倍して) ゼロ多項式またはモニック多項式となるものを選べば, その $d(X)$ が $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ の最大公約元と一致する (教科書の例 2.19).

特に, 次の (a), (b), (c) は同値である:

(a) $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ の最大公約元が 1 である.

(b) $s_1(X)f_1(X) + \cdots + s_n(X)f_n(X) = 1$ となる $s_1(X), \ldots, s_n(X) \in K[X]$ が存在する.

(c) $I(f_1(X), \ldots, f_n(X)) = K[X]$.

多項式の最大公約元も, 整数の場合と同様に, ユークリッドの互除法を用いて計算することができる. 0 でない二つの多項式 $f(X), g(X)$ が与えられたら, 割り算を繰り返して, $I(f(X), g(X))$ に属する 0 でない多項式のうち次数が最小のものを探せば $f(X), g(X)$ の最大公約元が分かる. 3 つ以上の多項式の場合は, 2 つずつ多項式をとってユークリッドの互除法を行っていけばよい.

[1] ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html

**問題 15.1** ユークリッドの互除法を用いて, 次で与えられる $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ の最大公約元を求めよ.

(1) $f_1(X) = X^5 + 4X^3 + X^2 + 3X + 3,\ f_2(X) = X^3 - X^2 + 3X - 3.$

(2) $f_1(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1,\ f_2(X) = X^3 - X^2 + X + 1.$

(3) $f_1(X) = X^3 + 2X^2 + X,\ f_2(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 9X + 6.$

(4) $f_1(X) = 2X^4 - 4X^3 + 6X^2 + 7X + 1,\ f_2(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 4.$

(5) $f_1(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - 3X,\ f_2(X) = X^4 - X,\ f_3(X) = X^3 - 2X^2 + X.$

(6) $f_1(X) = X^5 + 4X^3 + X^2 + 3X + 3,\ f_2(X) = X^3 + X + 1,\ f_3(X) = X^4 + 4X^2 + 3.$