11 整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアル

整数全体 $\mathbb{Z}$ の空でない部分集合 I が $\mathbb{Z}$ の**イデアル**であるとは, I が次の (i)(ii) を満たすことをいう:

(i) 任意の $a, b \in I$ について $a + b \in I$,

(ii) 任意の $r \in \mathbb{Z}$, $a \in I$ について $ra \in I$.

上記の (ii) で $r = 0$ の場合を考えれば, $\mathbb{Z}$ の任意のイデアルは 0 を含むことが分かる. また, 0 のみからなる集合 $\{0\}$ も $\mathbb{Z}$ のイデアルである. $\{0\}$ を**零イデアル**と呼び, 誤解の恐れのないときは単に 0 で表すこともある.

問題 11.1 I, J を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする.

(1) $I \cap J$ も $\mathbb{Z}$ のイデアルになることを示せ.

(2) $I \cup J$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルになるとは限らないが, $I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルになることを示せ.

問題 11.2 (1) $\mathbb{Z}$ のイデアルは, $\mathbb{Z}$ を加法によって群とみなしたときの部分群となることを示せ.

(2) 逆に, $\mathbb{Z}$ を加法によって群とみなしたときの部分群はすべて $\mathbb{Z}$ のイデアルになることを示せ.

既に我々は $\mathbb{Z}$ の部分群の具体例をいろいろみてきたが, それらはすべて $\mathbb{Z}$ のイデアルの具体例でもある. 巡回群の部分群はすべて巡回群であったから, $\mathbb{Z}$ の任意のイデアル I は, ある $d \in \mathbb{Z}$ を用いて $\langle d \rangle$ と書ける. これは教科書では $I(d)$ という記号でも表されており, さらに $d\mathbb{Z}$ とも書ける. 全部同じ意味なので, この授業ではどの記号を使ってもよい:

$$I(d) = \langle d \rangle = d\mathbb{Z} = \{md \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

なお, 複数の生成元を書きたいときには次のように書く:

$$I(a_1, \ldots, a_n) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_n\mathbb{Z} = \{m_1a_1 + \cdots + m_na_n \mid m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}.$$

本によっては $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ を $(a_1, \ldots, a_n)$ と書くものもある.

[1]ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html