9　剰余類・ラグランジュの定理

G を群, H を G の部分群とする. $g \in G$ に対し,

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

を (g に代表される) H の**左剰余類**という.

問題 9.1 $a, b \in G$ について, 次の (i)–(v) は同値であることを示せ.
(i) $aH = bH$
(ii) $a^{-1}b \in H$
(iii) $b \in aH$
(iv) $a \in bH$
(v) $aH \cap bH \neq \emptyset$

$a \sim b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} aH = bH$ により G の元の間に関係式 $\sim$ を定義すると, これは同値関係となる (各自確かめよ). gH は $\sim$ に関するひとつの同値類に他ならない. これにより G を同値類別すると, (H もひとつの同値類であるから) e を含むような完全代表系を考えることができる. 特に G が有限群のとき, $\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_k\}$ をそのような完全代表系とすると,

$$G = H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_k H$$

かつ $H, g_2 H, \ldots, g_k H$ のどの 2 つも共通部分をもたないようにできる. このとき, H と各 $g_i H$ たちの元の個数はすべて $|H|$ に等しいから,

$$|G| = k|H|$$

を得る. 従って $|H|$ は $|G|$ の約数である (**ラグランジュの定理**). またこのとき k を G における H の**指数**といい, $[G : H]$ で表す.

問題 9.2 $G = S_4$ (4 次の対称群) のとき, 次の G の部分群 H について, H の剰余類と指数 $[G : H]$ を求めよ.
(1) $H = A_4$ (交代群)
(2) $H = \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$

問題 9.3 G を有限群, H を G の部分群, K を H の部分群とする. このとき, 指数の関係式 $[G : K] = [G : H][H : K]$ が成り立つことを示せ.

[1] ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html