

1 群の定義

問題 1.1. 次の (1) ~ (8) で与えられる集合と演算 \bullet が群の定義を満たすかどうかを調べ、群になる場合はアーベル群かどうかを述べよ. また, 群にならないときは群の定義のどこが成り立たないかを指摘せよ.

(1) 集合は複素数全体 \mathbb{C} , 演算は, $a, b \in \mathbb{C}$ に対し $a \bullet b = ab$ (複素数の積).

(2) 集合は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (複素数全体から 0 を除いた集合), 演算 \bullet は (1) と同様に複素数の積.

(3) 集合は有理数全体 \mathbb{Q} , 演算は, $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し $a \bullet b = -a - b$.

(4) W をアルファベットの小文字 1 文字以上からなる文字列 (スペースは含まない) 全体の集合とする. $a, b \in W$ に対して $a \bullet b$ は文字列 a の後に文字列 b をつけたもの. 例えば $a = \text{daisuu}$, $b = \text{gaku}$ のとき, $a \bullet b = \text{daisuugaku}$.

(5) 上記の (W, \bullet) に “0 文字の文字列” (便宜上, 記号 e で表す) を加えたもの. 任意の $a \in W \cup \{e\}$ に対して $e \bullet a = a \bullet e = a$ とする.

(6) 上記にさらに別の元 d を加える. 文字列 a に対し, $a \bullet d$ は a の末尾の 1 文字を除いたもの, $d \bullet a$ は a の先頭の 1 文字を除いたものとする (ただし, e に対しては $e \bullet d = d \bullet e = e$). 例えば, $a = \text{daisuu}$ のとき, $a \bullet d = \text{daisu}$, $d \bullet a = \text{aisuu}$. また, d 同士の積は $d \bullet d = d$ とする.

(7) 集合は $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{C}, \\ ac \neq 0 \end{array} \right\}$, 演算 \bullet は, $A, B \in T$ に対して $A \bullet B = AB$ (行列の積) で定める.

(8) 集合は $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$, 演算 \bullet は行列の積で定める.

¹ホームページ <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html>