9 ガウスの発散定理

最初に面積分についてもう少し補足しておく.

曲面が一つの座標系で覆えない場合について. 前回のように曲面全体が平面内の一つの領域 U と同一視できない場合, 曲面をいくつかの部分に分割して, それぞれを適当な座標系で覆うことがある. その時の面積分は各部分のものを足し合わせることにより定義する.

曲面の向き. S を $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面とすると, S の各点における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の選び方は, その向きに応じて 2 通りある (前回の記号でいうと, u, v の書き順は任意だから $P_u \times P_v$ 方向と $P_v \times P_u$ 方向の 2 通り). このときもし, (必要ならば座標系の取り方を調節して) 曲面 S 全体で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の変化が連続的になる (急に逆向きにならない) ようにできるならば, S は**向き付け可能**であるという. 例えば S が $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面であれば, 単位法線ベクトルの向きが常に外向きか内向きになるようにすることができるので, 向き付け可能となる. 一方, 向き付け不可能な曲面としてはメビウスの帯が有名である.

ガウスの発散定理. ここでは, 出てくる関数はすべて C^1 級と仮定する.

V を (x, y, z)-空間内の (3 次元) 有界領域とし, その境界が曲面 S であったとする. S は有限個の滑らかな曲面に分割できると仮定する. このとき, 分割された各部分は向き付け可能で, その単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は常に外向き (V に含まれない方向) になるようにとっておく. そして $\boldsymbol{v}$ を V を含む領域で定義されたベクトル場とするとき,

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} \; dxdydz = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; dS$$

が成り立つ. これを**ガウスの発散定理**という.

演習 9.1 次で与えられる閉曲面 S とベクトル場 $\boldsymbol{v}$ について, 面積分 $\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$ を求めよ. ただし, 単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きにとるものとする.

(1) S は直方体 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 3$, $|z| \leq 2$ の表面, $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (x^2, 0, z^2)$.

(2) S は円柱 $x^2 + y^2 \leq 4$, $|z| \leq 2$ の表面, $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (\cos y, \sin x, \cos z)$.