8 ストークスの定理

ここでは念のため, 出てくる関数はすべて C^2 級と仮定する.

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が, $\mathbb{R}^2$ 内の領域 U 上で定義された関数 $P : U \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ でパラメータ表示されているとする. さらに, U は有界閉領域とし, その境界をなす曲線 α を U を左回りに回るようにとり, それが関数 $\boldsymbol{a}(s) = (u(s), v(s))$ で表されているとしよう. α は有限個の点を除き滑らかであると仮定する. また, α に対応する S 内の曲線 (つまり S の境界をなす曲線) を γ とし, それを表す関数を $\boldsymbol{r} = P \circ \boldsymbol{a}$ と書いておく.

さて, S の単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとる:

$$\boldsymbol{n} = \frac{P_u \times P_v}{|P_u \times P_v|}.$$

一般に, S を含む領域で定義された $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対し, $\boldsymbol{F}$ の法成分 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ を S 上で面積分した

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \quad \left(= \int_U \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS\right)$$

を $\boldsymbol{F}$ の**面積分**と呼ぶ.

ストークスの定理の主張は, S を含む領域で定義された $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ について, $\operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ の面積分が

$$\int_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}' ds$$

という風に境界線上の線積分に一致する, というものである. ここで, $\boldsymbol{r}' = d\boldsymbol{r}/ds$ は γ の接ベクトルで, もう少し詳しく書くと,

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d(P \circ \boldsymbol{a})}{ds} = P_u \frac{du}{ds} + P_v \frac{dv}{ds}$$

だから, $dP = P_u du + P_v dv$ と書けば, $\boldsymbol{r}' ds = dP$ となって教科書の記述と一致する.

演習 8.1 次で与えられる曲面 S とベクトル場 $\boldsymbol{v}$ について, ストークスの定理の両辺の面積分と線積分を直接計算し, 両者が一致することを確かめよ.

(1) S は正方形 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $z = 1$, ベクトル場は $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (z^2, 5x, 0)$.

(2) S は半円 $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge 0$, $z = 0$, ベクトル場は $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y^2, -x^2, 0)$.

(3) S は放物面 $x^2 + y^2 + z = 1$ $(z \ge 0)$, ベクトル場は $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y, z, x)$.