6　曲線の長さ

$\mathbb{R}$ の閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ (または $\mathbb{R}^3$) 内の曲線 $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^2$ (または $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^3$) を考える. ここでは $\boldsymbol{r}$ は微分可能で $\boldsymbol{r}'$ は連続と仮定する. すると, 教科書の 3 章 3 節に書いてあるように, $\boldsymbol{r}$ の長さ L は接ベクトルの長さ $\sqrt{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'}$ を積分したもので与えられる:

$$L = \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)}\, dt.$$

平面内の曲線が $y = f(x)$ (f は微分可能で $f' = df/dx$ は連続) の形で与えられているときは, $\boldsymbol{r}(x) = (x, f(x))$ と書けば $\boldsymbol{r}'(x) = (1, f'(x))$ だから, $x = a$ から $x = b$ までの曲線の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

となる.

演習 6.1 次の曲線の長さを求めよ.

(1) 放物線 $y = cx^2$ ($c \neq 0$) の $x = a$ から $x = b$ までの弧長.

(2) らせん $\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$ ($a, c \neq 0$) の $t = 0$ から $t = 2\pi$ までの弧長.

$I = [a, b]$ 上で定義された $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\boldsymbol{r}$ に対し, 曲線の長さを与える I 上の関数 $s(t)$ が

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)}\, dt$$

で与えられる. この式の両辺を t で微分して 2 乗すると,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

となる. 形式的に $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ と書いて, これを

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = dx^2 + dy^2$$

と表すことがある. この ds は**線素**と呼ばれ, x 成分の微小変位 dx と y 成分の微小変位 dy に対する曲線の長さの微小変位と考えられる.

さて, 曲線 $\boldsymbol{r}$ を弧長 s の関数として $\boldsymbol{r}(s)$ で表した場合, 上の式で言うと $t = s$ となり $ds/dt = ds/ds = 1$ となるから, この場合は $\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = 1$, すなわち接ベクトルが単位ベクトルになる. (教科書 p. 195 の真ん中あたりではこの事実を使っている.)